

FACTORISATION DE $x^n - y^n$

Auteur : Jean-Pierre Bouvier

TI-Nspire CAS™

1. Objectif

Le but de cette activité est d'étudier la factorisation de $x^n - y^n$ en fonction des valeurs de n , à l'aide de TI-Nspire.

Il s'agit d'une recherche expérimentale.

2. Énoncé

1) Quel que soit l'entier naturel non nul n , il semble que $x^n - y^n$ puisse se factoriser en un produit de deux facteurs, où l'un des deux facteurs est le même pour tout n .

Quel est ce facteur identique quel que soit n ?

2) Existe-t-il une forme de factorisation de $x^n - y^n$ qui soit valable pour tout entier n ?

3) Suivant les valeurs de n , le nombre de facteurs proposés par la calculatrice est différent.

Trouver la loi qui fixe ce nombre de facteurs.

Il est possible que l'on ne trouve que des aspects particuliers de cette loi, c'est-à-dire une loi qui ne s'appliquerait que pour des valeurs de n particulières.

4) Justifier les résultats trouvés aux questions précédentes qui paraissent pouvoir l'être.

On s'intéressera en particulier aux cas où $n = 4$, $n = 6$, $n = 9$; en utilisant le logiciel de calcul formel, associer judicieusement les facteurs deux par deux.

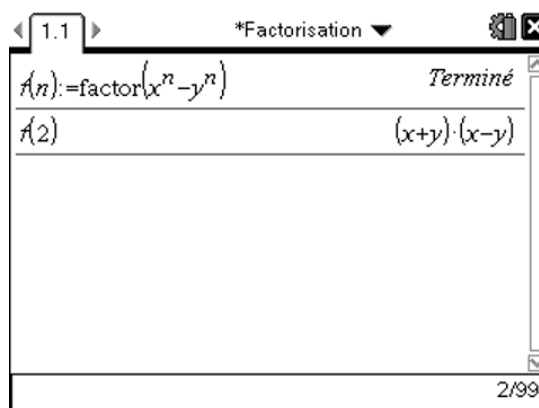
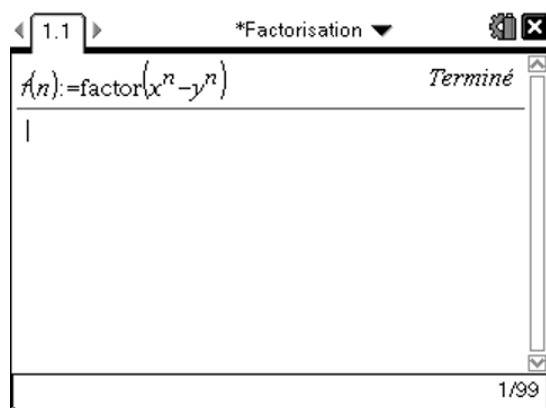
3. Conduite de l'activité

La calculatrice ou le logiciel TI-Nspire CAS permettent de traiter cette étude expérimentale de deux façons différentes : l'une consiste à utiliser une page **Calculs** où l'on travaille comme dans n'importe quel logiciel de calcul formel ; l'autre utilise l'Éditeur mathématique interactif.

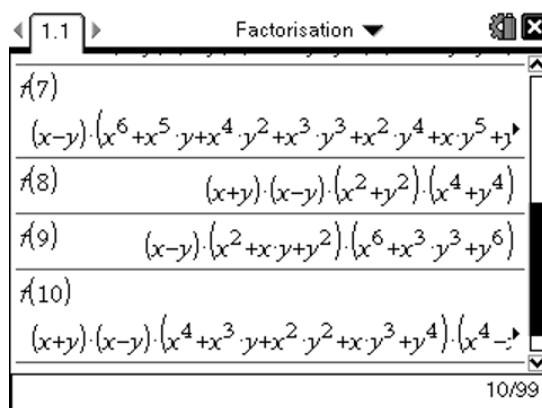
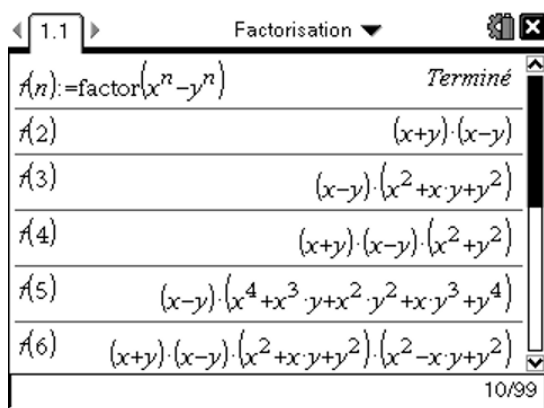
A) Dans une page Calculs

1) Pour mener facilement cette recherche, on définit la commande $\text{factor}(x^n - y^n)$, que l'on stocke dans $f(n)$.

Il suffira alors de taper $f(2)$, $f(3)$, etc.



On obtient alors les écrans suivants.



On peut constater que le facteur $x - y$ est toujours présent dans la factorisation de $x^n - y^n$.

2) Selon les valeurs de n , la factorisation prend des formes différentes.

Il semble que quand n est pair, deux facteurs apparaissent dans toutes les factorisations : $x - y$ et $x + y$. Dans ce cas, $x^2 - y^2$ peut être mis en facteur.

3) Relevé du nombre de facteurs :

Valeurs de n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Nombre de facteurs	2	2	3	2	4	2	4	3	4	2	6	2	4	4	5

Valeurs de n	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Nombre de facteurs	2	6	2	6	4	4	2	8	3	4	4	6	2	8	2

On remarque, en examinant les facteurs obtenus dans chaque cas, des particularités concernant les cas où n est pair et où n est un multiple de 3.


4) Pour $n = 4$, on a : $x^2 - y^2 = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2)$ qui donne donc la factorisation $(x + y)(x - y)(x^2 + y^2)$.


Pour $n = 6$ et $n = 9$, proposer aux élèves d'utiliser la factorisation de $f(3)$ et de développer l'expression $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$.


On remarque donc que quand n est pair, la factorisation comporte au moins 3 facteurs (à partir de $n = 4$).

Il semble d'autre part que, quand n est multiple de 3 impair, la factorisation comporte au moins 3 facteurs (à partir de $n = 9$) dont les facteurs $(x - y)$ et $(x^2 + xy + y^2)$ et que, quand n est multiple de 3 pair, la factorisation comporte au moins 4 facteurs (à partir de $n = 6$) dont les facteurs $(x - y)$, $(x + y)$, $(x^2 - xy + y^2)$ et $(x^2 + xy + y^2)$.



B) Dans une page Éditeur mathématique

Pour éviter de changer les valeurs de n et pouvoir actualiser rapidement le calcul, on peut commencer par partager l'écran en deux :  (on choisira le partage horizontal), puis choisir dans l'une des

deux parties d'écran l'application Géométrie. Cliquer sur la 1^{re} icône , puis choisir

 A:Contrôle curseur. Nommer n la variable, puis en effectuant un clic-droit sur la boîte, choisir Réglages. Régler alors le curseur de 1 à 30, par pas de 1, Style : Affichage réduit.

Dans l'autre partie de page (application Éditeur mathématique), ouvrir une Boîte saisie math (3^e icône

 3:Insert... ou Ctrl + M).  1:Boîte saisie math

Écrire $\text{factor}(x^n - y^n)$ dans la boîte, puis demander son évaluation :  1:Action...  1:Évaluer.

Il suffit alors de faire varier le curseur n en cliquant sur les flèches \triangle ou ∇ pour changer la valeur de n .



On obtient alors l'écran suivant :

Affichage Normal (ordinateur)

factor($x^n - y^n$)
 $\rightarrow (x-y) \cdot (x^{10} + x^9 \cdot y + x^8 \cdot y^2 + x^7 \cdot y^3 + x^6 \cdot y^4 + x^5 \cdot y^5 + x^4 \cdot y^6 + x^3 \cdot y^7 + x^2 \cdot y^8 + x \cdot y^9 + y^{10})$

$n := 11.$ 

Affichage Calculatrice

1.1 *Factorisation_b  

factor($x^n - y^n$)
 $\rightarrow (x-y) \cdot (x^{10} + x^9 \cdot y + x^8 \cdot y^2 + x^7 \cdot y^3 + x^6 \cdot y^4 + x^5 \cdot y^5 + x^4 \cdot y^6 + x^3 \cdot y^7 + x^2 \cdot y^8 + x \cdot y^9 + y^{10})$

$n := 11.$ 