A1f – CONJECTURES EN ARITHMÉTIQUE

TI-89 – Voyage 200

Mots-clés : diviseur, multiple, congruence, PGCD.

1. Objectif

Faire émerger des conjectures dans la résolution de problèmes d'arithmétique.

2. Énoncé

Voir fiche élève.

3. Commentaires

Ces deux exercices peuvent être proposés au début du cours d'arithmétique du programme de Terminale S spécialité mathématique. Ils donneront, pour l'exercice **1,** une première idée de ce que sont les congruences et, pour l'exercice **2,** une possibilité de réinvestir directement ce que l'élève doit savoir sur le PGCD.
La rapidité de calcul permet de réaliser des tests sur un grand nombre de valeurs. Dans bien des cas, les conjectures proposées permettent de résoudre le problème. C'est donc cette possibilité de **voir** les nombres, au sens propre du terme, qui va guider l'élève dans la résolution du problème.

Deux caractéristiques du calcul formel vont être utilisées dans ces questions d'arithmétique :
- le calcul formel donne la valeur exacte des rationnels sous la forme d'une fraction irréductible, ainsi le caractère entier ou non d'un tel nombre va pouvoir être mis en évidence ;
- une autre caractéristique du calcul formel est la possibilité de pouvoir réaliser des calculs littéraux ; ainsi la calculatrice est capable de remplacer par exemple n par un entier de la forme $5k + 2$.

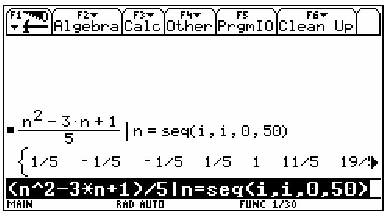
4. Mise en œuvre

Exercice 1 : Déterminer les entiers n tels que : $n^2 - 3n + 1$ soit divisible par 5.

La mise en place de conjectures peut être faite à partir de la production de la liste des rationnels $\dfrac{n^2-3n+1}{5}$ pour n variant de 0 à 50.
La syntaxe à utiliser pour produire cette liste est la suivante :

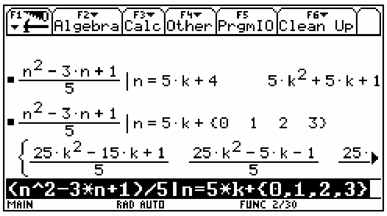
(n^2–3n+1)/5 **2nd [|]** n **= seq(**i,i,0,50) **ENTER**.

L'*écran* 1 ainsi obtenu montre que, dans la liste, toutes les 5 valeurs, nous obtenons un entier, ce qui conduit naturellement à envisager de considérer n modulo 5.



écran 1

La résolution du problème peut alors se faire en proposant à la calculatrice de remplacer n par $5k + 4$ (qui correspond à la place supposée de l'entier), puis de remplacer n par $5k$, $5k + 1$, $5k + 2$, $5k + 3$. L'*écran* 2 fournit alors tous les éléments de réponse. Il va de soi qu'une rédaction faisant intervenir les congruences sera très appropriée pour mettre en forme la solution.



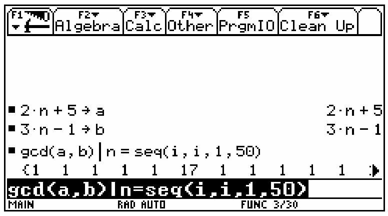
écran 2

Exercice 2 : Déterminer suivant les valeurs de *n*, le PGCD de 2 *n* + 5 et de 3 *n* – 1.

Nous allons noter *a* la valeur 2 *n* + 5 et *b* la valeur 3 *n* – 1. La liste des PGCD de *a* et *b* pour *n* variant de 1 à 50 est obtenu avec la séquence :

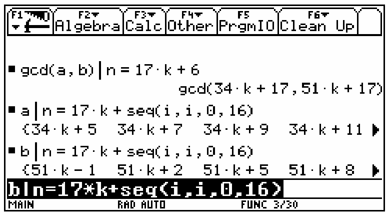
2n+5 **STO>** a **ENTER**
3n–1 **STO>** b **ENTER**
gcd(a,b) **2nd [|]** n **= seq(**i,i,1,50) **ENTER**

La liste (*écran* 3) montre que l'on a une période qui vaut 17, et que le PGCD vaut 1 pour toutes les valeurs de la liste sauf pour *n* = 6, 23, 40 où il vaut 17.



écran 3

Les conjectures nous conduisent à l'*écran* 4 qui résout le problème.



écran 4

A titre de prolongement, la détermination du PGCD de 2 *n* + 3 et de 7 *n* – 1 suivant les valeurs de *n*, montrera à l'élève que la mise en place des conjectures n'est pas toujours aussi simple.

Nom .... **Classe** ....

A1f – CONJECTURES EN ARITHMÉTIQUE

Les deux exercices ci-dessous sont indépendants.

Exercice 1 : Détermination des entiers n tels que : $n^2 - 3n + 1$ soit divisible par 5.

1) Produire à l'aide de la calculatrice la liste des quotients de $n^2 - 3n + 1$ par 5 pour n variant de 0 à 50. La séquence est la suivante : (n^2–3n+1)/5 **2nd [|]** n **=** **seq(**i,i,0,50) **ENTER**.

2) A quelles places (quels rangs) sont situés les entiers dans la liste ? L'écart entre ces places est-il constant ?

3) Dans l'expression $\dfrac{n^2 - 3n + 1}{5}$, remplacer avec la calculatrice n par $5k + 4$.

La séquence est la suivante : (n^2–3n+1)/5 **2nd [|]** n **=** 5k+4 **ENTER**.
Que remarque-t-on en ce qui concerne la nature du résultat ?

4) Remplacer, avec la calculatrice, dans l'expression $\dfrac{n^2 - 3n + 1}{5}$ la valeur n par $5k$, puis $5k + 1$, puis $5k + 2$, et enfin $5k + 3$.
La séquence est la suivante :

(n^2-3n+1)/5 **2nd [|]** n **=** 5k+{0,1,2,3} **ENTER**.

Expliquer pourquoi, dans chaque cas, le résultat n'est pas un entier.

Exercice 2 : Détermination du PGCD de $2n + 5$ et de $3n - 1$, suivant les valeurs de n.

1) On note $a = 2n + 5$ et $b = 3n - 1$. Produire à l'aide de la calculatrice la liste des PGCD de a et b pour n variant de 1 à 50. La syntaxe est la suivante :

2n+5 **STO>** a **ENTER**
3n–1 **STO>** b **ENTER**
gcd(a,b) **2nd [|]** n **=** **seq(**i,i,1,50) **ENTER**

gcd(est obtenu par : **2nd MATH 1 : Number C : gcd(** ou en tapant directement g c d (.

2) Que remarque-t-on ?
A quelles places (quels rangs) sont situées les valeurs 17 dans la liste ?

3) Déterminer deux entiers α et β tel que $\alpha a + \beta b$ soit égal à une constante (indication : faire disparaître les n).
En déduire que le PGCD de a et b est un diviseur de 17. Quelles sont les valeurs possibles du PGCD ?

4) Déterminer, avec la calculatrice, le PGCD lorsque $n = 17k + 6$;
la syntaxe est :

gcd(a,b) **2nd [|]** n **=** 17k+6 **ENTER**.

Pourquoi ce PGCD vaut-il 17 ?

5) Déterminer, avec la calculatrice, le PGCD lorsque $n = 17k$. Pourquoi vaut-il 1 ?
Poursuivre et conclure.