

EP 035 - 2007 : Demi-vie

Auteurs du corrigé : Alain Soléan, France et Michel Villiaumey

TI-Nspire™ / TI-Nspire™ CAS

Avertissement : ce document a été réalisé avec la version 1.4 ; il est disponible dans sa version la plus récente sur notre site <http://education.ti.com/france>, menu Ressources pédagogiques.

Fichier associé : EP035_2007_DemiVie_CAS.tns

1. Le sujet

Sujet 035 de l'épreuve pratique 2007 – Demi-vie

Énoncé

On administre à un patient un médicament par injection intraveineuse (de courte durée). La concentration du médicament dans le sang est immédiatement maximale, puis elle diminue en fonction du temps. On fait l'hypothèse (H) suivante :

La diminution de la concentration entre deux instants t_0 et t_1 est proportionnelle à la fois à la durée $t_1 - t_0$ et à la concentration à l'instant t_0 .

On note C_0 la concentration initiale et C_n la concentration au bout de n minutes. (On prendra pour unité de temps la minute et $C_0 = 1$ pour unité de concentration initiale à la fin de l'injection).

1. On admet que l'hypothèse (H) conduit à la relation $C_{n+1} - C_n = -kC_n$, où k est une constante positive.

a) Expliciter, pour $n \geq 0$, C_{n+1} en fonction de C_n .

b) Quelle est la nature de la suite (C_n) ?

c) Exprimer C_n en fonction de n .

2. On choisit $k = 0,035$.

a) À l'aide d'un tableur calculer la valeur de C_n pour n allant de 1 à 300. Présenter les résultats dans un tableau comme ci-dessous :

	A	B	C
1	n	C_n	
2	0	1	
3	1	0,965	
4	2		

b) Tracer le nuage de points $(n ; C_n)$ représentant l'évolution de la concentration sur 5 heures.

3. Étude de la demi-vie, c'est à dire la période au bout de laquelle la concentration du médicament dans le sang diminue de moitié

a) Observations :

- Au bout de combien de minutes la concentration initiale aura-t-elle été divisée par deux ? Donner le résultat sous la forme d'un encadrement de deux entiers consécutifs.
- Quelle est la concentration au bout de 30 minutes ? Donner la valeur approchée à 10^{-2} près.
- Au bout de combien de minutes, cette dernière concentration aura-t-elle été divisée par deux ? Donner le résultat sous la forme d'un encadrement de deux entiers consécutifs.
- Que peut-on conjecturer ? Tester cette conjecture sur d'autres durées.

b) Justification :

- Vérifier que pour tout entier naturel n , on a $C_{n+20} \leq 0,5 C_n < C_{n+19}$.
- Valider la conjecture émise à la question 3.a).

Production demandée

- Réponses écrites pour les questions 1 et 3.b).

Compétences évaluées

- Compétences TICE**
 - Utilisation de certaines fonctions d'un tableur.
- Compétences mathématiques**
 - Suites géométriques ;
 - Lectures graphiques.

2. Corrigé

1) a) On a $C_{n+1} - C_n = -kC_n$ d'où $C_{n+1} = -kC_n + C_n$ et $C_{n+1} = (1-k)C_n$ pour tout entier $n \geq 0$.

b) Comme pour tout entier $n \geq 0$, $C_{n+1} = qC_n$ avec $q = 1 - k$ la suite (C_n) est géométrique de raison q et de premier terme $C_0 = 1$.

c) D'après ce qui précède on peut écrire que, pour tout entier $n \geq 0$, $C_n = (1 - k)^n$.

2. a) Ouvrir une page **Tableur & listes**.

Colonne **A** : dans la cellule grisée inscrire $=\text{seq}(i, i, 0, 300)$. Nommer cette colonne **n**.

Colonne **B** : dans la cellule grisée à l'aide de l'outil **Données, Générer une suite**, inscrire $u(n) = 0.965^{n-1}$, valeur initiale 1, nombre maximum de termes : 301, valeur maximale : 1. Nommer cette colonne **cn**.

1.1	1.2	1.3	RAD	AUTO	REEL	CHPS
A	n	B	cn	C	D	E
$=\text{seq}(i, i, 0, 300)$						
1	0		1			
2	1		.965			
3	2		.931225			
4	3		.898632125			
5	4		.867180000625			
6	5		.836937000609375			

1.1	1.2	1.3	RAD	AUTO	REEL	CHPS
A	n	B	cn	C	D	E
$=\text{seq}(i, i, 0, 300)$						
1	0		1			
2	1		.965			
3	2		.931225			
4	3		.898632125			
5	4		.867180000625			
6	5		.836937000609375			

b) Ouvrir une page **Graphiques & géométrie**.

Choisir **Type de graphiques, Nuage de points**.

Dans la ligne de saisie, associer x à **n** et y à **cn**.

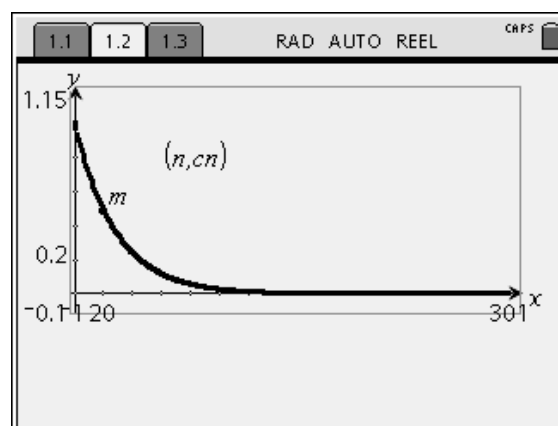
Régler la **Fenêtre** :

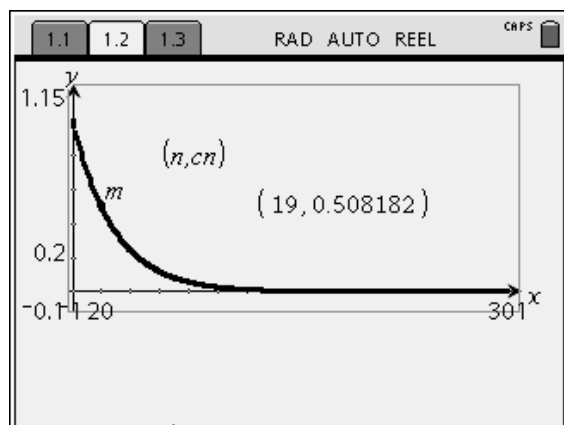
Xmin = -1 ; **Xmax** = 301 ; **Ymin** = -0.1 ; **Ymax** = 1.2
(par exemple).

3. a) Placer m , un **Point** sur le nuage précédent.

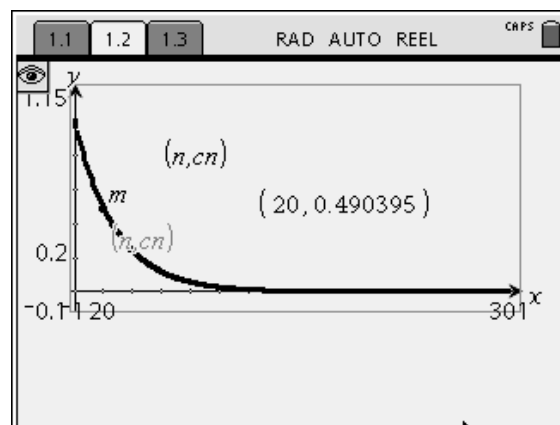
Ses coordonnées s'affichent.

Déplacer ce point de façon à trouver la valeur maximale de n pour laquelle l'ordonnée de m est supérieure à 0,5.





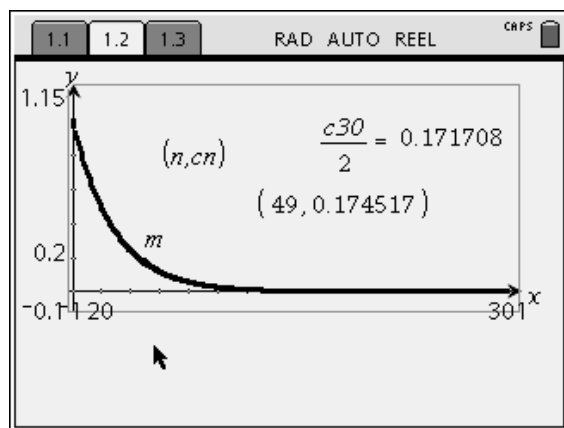
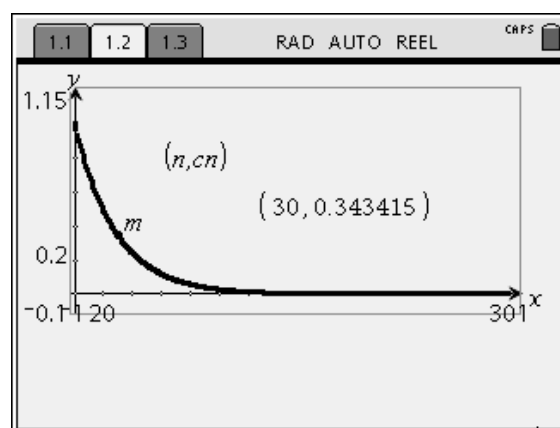
Pour $n \leq 19$, $C_n > 0,5$.



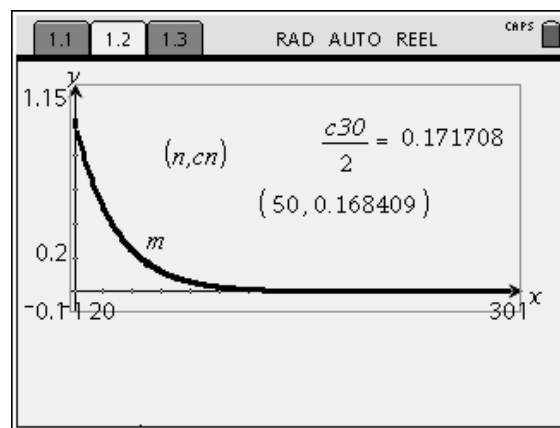
Pour $n \geq 20$, $C_n < 0,5$.

Pour $n = 30$, $C_n \approx 0,34$.

Au bout de 30 minutes, la concentration vaut environ $0,34 \times 10^{-2}$ près.



Pour $n = 49$, $C_n > \frac{1}{2} C_{30}$.



Pour $n = 50$, $C_n < \frac{1}{2} C_{30}$.

On peut donc conjecturer que la concentration diminue de moitié, chaque fois que la durée augmente d'un nombre t tel que $19 \leq t < 20$ (en minutes).

On peut déplacer m de manière à avoir d'autres exemples de cette conjecture.

b) Vérifions que pour tout entier naturel n , on a $C_{n+20} \leq 0,5 C_n < C_{n+19}$.

Ouvrir une page **Calculs** comme ci-contre :

C_n étant une suite géométrique de raison 0,965 on a :

$$C_{n+20} = 0,965^{20} \cdot C_n \quad \text{donc } C_{n+20} \approx 0,490 \cdot C_n ;$$

$$C_{n+20} \leq 0,5 C_n ;$$

$$C_{n+19} = 0,965^{19} \cdot C_n \quad \text{donc } C_{n+19} \approx 0,508 C_n ;$$

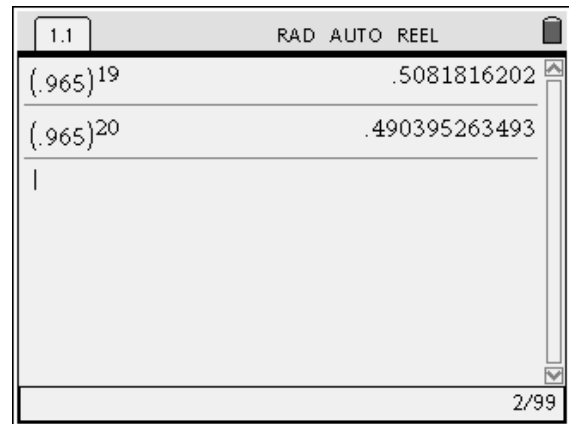
$$C_{n+19} > 0,5 C_n .$$

On a bien pour tout entier naturel n ,

$$C_{n+20} \leq 0,5 C_n < C_{n+19}.$$

La concentration diminue donc bien de moitié lorsque la durée augmente d'un nombre t tel que :

$$19 \leq t < 20 \quad (\text{en minutes}).$$



3. Pour aller plus loin

On peut déterminer la valeur de t , de manière théorique, pour toute valeur de $k \in]0 ; 1 [$.

En effet, on a : $C_n = (1 - k)^n$.

Et le nombre t doit donc vérifier :

$$C_{n+t} = \frac{1}{2} C_n .$$

$$\text{C'est à dire : } (1 - k)^{n+t} = \frac{1}{2} (1 - k)^n ,$$

$$\text{Ou encore : } (1 - k)^t = \frac{1}{2} .$$

Ouvrir une page **Calculs** et demander la résolution de cette dernière équation, puis demander l'évaluation de la solution pour $k = 0,035$.

On retrouve bien $19 \leq t < 20$.

