

Nombre: \_\_\_\_\_ Fecha: \_\_\_\_\_

## Actividad NUMB3RS: Rama y atadura

Charlie y Amita intentan determinar dónde entregará información un topo infiltrado en la FBI. Charlie afirma que puede "aplicar un algoritmo que analiza las características de los puntos de reunión actuales para hallar las variables clave y luego aplicar un algoritmo de rama y atadura, y así, ojalá logre darles la ubicación del próximo destino probable del topo".

Charlie se refiere a un programa para optimizar la probabilidad de un resultado. Un método de optimización que suele estudiarse en los cursos de matemáticas de la escuela secundaria es la programación lineal. El algoritmo de rama y atadura que menciona Charlie puede usarse cuando se desean, pero no se logran, soluciones que sean números enteros.

Considera la siguiente situación hipotética: Charlie descifra claves para la FBI usando dos métodos: la *fuerza bruta* y el *criptoanálisis lineal*. Para descifrar una clave con el primer método, Charlie necesita 2 horas de análisis y 6 horas de tiempo de computadora. El segundo método toma 5 horas de análisis y 5 horas de computadora. Si Charlie tiene 16 horas para análisis y 30 horas para usar la computadora, ¿cuál es el número máximo de claves que puede descifrar?

1. Escribe la meta y las restricciones del problema. Sea  $x$  el número de claves descifradas con fuerza bruta y sea  $y$  el número de casos resueltos con criptoanálisis lineal .

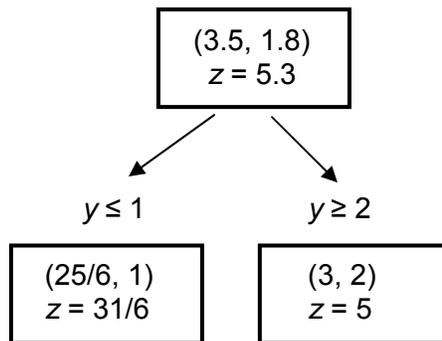
Para resolver un problema de programación lineal, primero traza una gráfica del sistema de desigualdades dado por las restricciones. El área resultante se llama la región factible y los puntos de las esquinas de la región son los valores óptimos en potencia. El objetivo del problema es o bien maximizar o bien minimizar una expresión y el punto de esquina con las coordenadas que satisfagan ese objetivo ofrece la solución óptima.

2.
  - a. Usa la aplicación de Graficar Desigualdades en la calculadora para trazar la gráfica de la región factible. Gradúa la ventanilla de mirar a  $x[0, 10]$  y  $y[-1, 8]$ .
  - b. Identifica los puntos de esquina de la región factible.
  - c. Evalúa la expresión objetivo para cada punto de esquina y determina la solución óptima.
3. Descifrar una clave parcialmente no es un resultado deseable. ¿Qué está mal en tu solución a la pregunta 2c?

El algoritmo de rama y atadura nos permite forzar las variables para que sean números enteros a la vez que se optimiza la situación. El primer paso es *ramificar* desde una variable que no sea un entero, generando dos problemas nuevos. Para simplificar el uso de la calculadora, optaremos por ramificar en  $y$ . La solución actual es  $y = 1.8$ , de modo que una rama añade la restricción  $y \leq 1$  al problema original y la o otra rama añade  $y \geq 2$ .

4. Resuelve el sistema de nuevo con la restricción adicional  $y \leq 1$ .
5. Resuelve el sistema con la restricción adicional  $y \geq 2$ .

Las soluciones aparecen en los siguientes cuadros.



La rama derecha está completa, pues la solución es integral. La rama izquierda parece requiere de más ramificación. Sin embargo, si redondeamos hacia abajo vemos que la solución a esta rama no será mejor que 5. Ya habíamos determinado una solución integral con dicho valor mediante la rama derecha, de modo que la rama izquierda está *atada* por ese valor y nuestra solución óptima es 5. Esto significa que Charlie puede descifrar un máximo de 5 claves.

6. Repite el algoritmo de rama y atadura ramificando en la variable  $x$ . Haz un diagrama para mostrar cómo se avanza.

*El objeto de esta actividad es dar a los estudiantes un vistazo breve y sencillo de un tema matemático muy extenso. TI y NCTM lo invitan a usted y a sus estudiantes a aprender más sobre este tema con las extensiones que se ofrecen abajo y con su propia investigación independiente.*

## Extensiones

Cuando se emplean más de dos variables en un problema de programación lineal, el análisis gráfico resulta más difícil. Para estos casos se puede emplear una modalidad llamada el Método Simplex. Investiga este método, comenzando con el siguiente sitio Web:

[http://people.hofstra.edu/faculty/Stefan\\_Waner/RealWorld/tutorialsf4/frames4\\_3.html](http://people.hofstra.edu/faculty/Stefan_Waner/RealWorld/tutorialsf4/frames4_3.html)

### Recursos adicionales

- Este sitio Web trae ejemplos del método simplex y algoritmo simplex dual.  
<http://www.egwald.com/operationsresearch/orpage.php3>
- El siguiente sitio Web emplea la programación lineal con el béisbol de las Ligas Mayores.  
<http://riot.ieor.berkeley.edu/~baseball/>
- Este sitio Web tiene una aplicación Flash del método simplex así como una añadidura a Excel que trae instrucciones para tres algoritmos para resolver casos de programación lineal. Los dos primeros son métodos simplex que atraviesan la frontera del politopo factible y el último es un método de punto interior.  
<http://www.me.utexas.edu/~jensen/ORMM/methods/unit/linear/index.html>
- La aplicación de Graficar Desigualdades viene incluida en las calculadoras graficadoras TI-84 Plus y TI-84 Plus Silver Edition. Para la TI-83 Plus o la TI-83 Plus Silver Edition se puede bajar esta aplicación gratis en <http://education.ti.com/inequality>.