EP 013 - 2007 : Orthocentre

Auteur du corrigé : Alain Soléan **TI-Nspire™ / TI-Nspire™ CAS**

***Avertissement** : ce document a été réalisé avec la version 1.4 ; il est disponible dans sa version la plus récente sur notre site http://education.ti.com/france, menu Ressources pédagogiques.*

Fichier associé : EP013_2007_Orthocentre.tns

1. Le sujet

Sujet 013 de l'épreuve pratique 2007 – Orthocentre

Enoncé

Dans le plan, ABC est un triangle quelconque.

On note K le centre de son cercle circonscrit et H son orthocentre.

On s'intéresse au lieu ($\mathcal{L}$) des points H quand C se déplace sur une droite parallèle à la droite (AB).

1. a) Faire une figure avec un logiciel de géométrie dynamique, faisant apparaître les points A et B, le point C sur une droite parallèle à (AB), le triangle ABC, le point H et le point K.

Afficher la trace du point H quand C varie sur la parallèle à (AB).

Faire une conjecture concernant la nature du lieu des points H.

b) Vérifier à l'aide du logiciel (la vérification par le calcul n'est pas demandée ici) l'égalité

$$(e) : \overrightarrow{KH} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC}$$

2. À partir de cette question, le plan est rapporté à un repère orthonormal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) ; les points A et B sont donnés par leur coordonnées A (–1 ; 1) et B (1 ; 1). Le point C est sur l'axe des abscisses et a pour abscisse un réel x .

a) Demander à nouveau le lieu ($\mathcal{L}$) des points H.

b) Quelle en serait une équation ?

3. Vérifier la conjecture émise en traçant le lieu des points H grâce à son équation.

4. En admettant que K a pour coordonnées $\left(0 ; \dfrac{2-x^2}{2}\right)$ et l'égalité (e) donnée à la première question, en déduire les coordonnées de H puis l'équation de ($\mathcal{L}$).

Production demandée

- Calculs et démonstration relatifs à la question **4**.

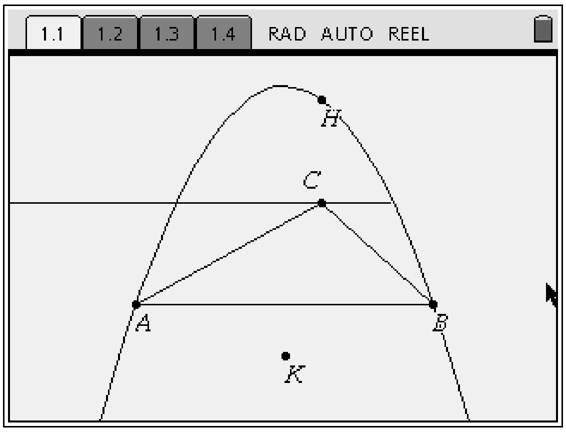
Compétences évaluées

- **Compétences TICE**
  - Construire une figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique ;
  - Visualiser un lieu ;
  - Tester les conjectures émises.
- **Compétences mathématiques**
  - Connaître et utiliser les points remarquables du triangle ;
  - Exploiter les propriétés de la parabole.

2. Corrigé

Les écrans sont obtenus à partir de la calculatrice.

1) a) Ouvrir une page **Graphiques & géométrie**.



Cacher les axes. Construire et nommer le **Segment** [AB]. Construire une **Parallèle** à (AB) et **Cacher** le point défini pour sa construction. Construire un **Point sur** cette droite, le nommer C.
Construire le **Triangle** ABC .

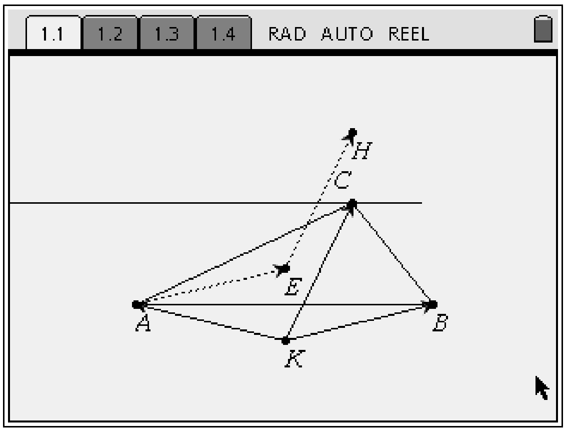
Construire deux **Médiatrices** de ce triangle, puis le **Point d'intersection**, le nommer K. **Cacher** les médiatrices.

Construire deux hauteurs (**Perpendiculaire** à un côté et passant par le sommet opposé), puis le **Point d'intersection**, le nommer H. **Cacher** les hauteurs.

Construire le **Lieu** de H lorsque C décrit la droite.

H semble donc décrire une parabole passant par les points A et B.

b) Sur l'écran précédent **Cacher** le lieu de H.



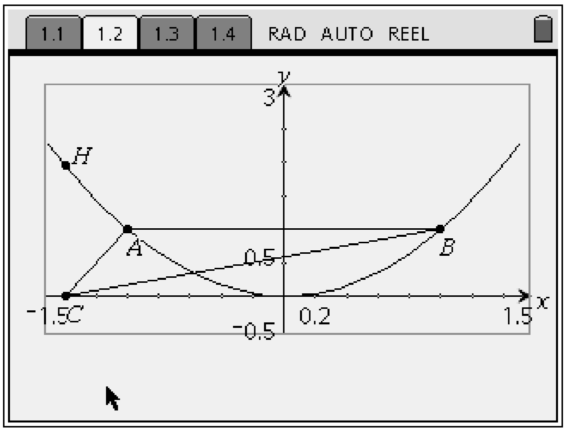
Construire les **Vecteurs** $\overrightarrow{KA}$, $\overrightarrow{KB}$ et $\overrightarrow{KC}$.

Puis construire l'image de A par la **Translation** de vecteur $\overrightarrow{KB}$, la nommer E et enfin l'image de E par la translation de vecteur $\overrightarrow{KC}$. Elle se trouve confondue avec H. Déplacer le point C pour vérifier l'invariance de ce résultat.

On a donc bien vérifié l'égalité (e).

Les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{EH}$ ont été dessinés en pointillés en réglant leurs **Attributs**.

2) a) Ouvrir une nouvelle page **Graphiques & géométrie**.



Placer un **Point**, le nommer A, demander l'affichage de ses **Coordonnées** et les modifier (pour cela cliquer sur **Texte**, l'abscisse est encadrée ; entrer alors la valeur –1 , faire de même pour l'ordonnée).

Recommencer l'opération pour le point B.

Placer C comme **Point sur** l'axe des abscisses.

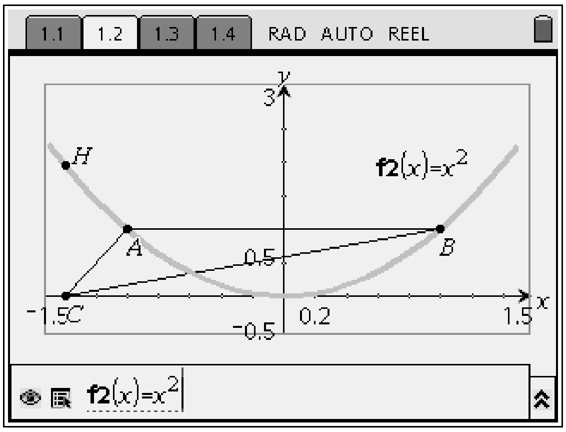
Cacher l'affichage des coordonnées et construire le **Triangle** ABC ainsi que deux de ses hauteurs et le point H comme précédemment. **Cacher** les hauteurs.

Régler la Fenêtre (ci-contre, on a choisi **XMin** = – 1.5, **XMax** = 1.5, **YMin** = – 0.5 et **YMax** = 3.

Construire le **Lieu** de H.

b) On peut alors conjecturer que le lieu ($\mathcal{L}$) du point H est inclus la courbe d'équation $y = x^2$.

3. Pour vérifier la conjecture **Cacher** le lieu et faire représenter la fonction f définie par $f(x) = x^2$.



4) Si $A(-1\,;1)$, $B(1\,;1)$, $C(x\,;0)$ et $K\left(0\,;\dfrac{2-x^2}{2}\right)$, nommons X et Y les coordonnées de H, on a :

$\overrightarrow{KA}\left(-1\,;\dfrac{x^2}{2}\right)$, $\overrightarrow{KB}\left(1\,;\dfrac{x^2}{2}\right)$, $\overrightarrow{KC}\left(x\,;\dfrac{x^2-2}{2}\right)$ et $\overrightarrow{KH}\left(X\,;Y-\dfrac{2-x^2}{2}\right)$.

En appliquant le résultat de l'égalité (e), on peut écrire $X = x$ et $Y = x^2$ d'où $Y = X^2$, vérifiant ainsi la conjecture.

3. Pour aller plus loin

On peut étudier le lieu du point H pour C variant sur une droite (d) quelconque.

Pour cela, considérons le repère $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{v})$, $\overrightarrow{v}$ étant le vecteur directement orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et de même norme que $\overrightarrow{AB}$. On obtient ainsi un repère orthonormal.

1er cas : (d) non perpendiculaire à $\overrightarrow{AB}$

Dans ce repère, la droite (d) a donc une équation de la forme $y = mx + p$ et le point C a pour coordonnées $(c\,;mc+p)$.

La hauteur (CH) a pour équation $x = c$ et la hauteur (AH) est la perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{BC}$ passant par A. En posant $H(x\,;y)$ on a :

$\overrightarrow{BC}(c-1\,;mc+p)$, $\overrightarrow{AH}(x\,;y)$ et $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AH} = 0$; d'où $x(c-1) + y(mc+p) = 0$.

Les coordonnées du point H vérifient le système : $\begin{cases} x = c \\ x(c-1) + y(mc+p) = 0 \end{cases}$.

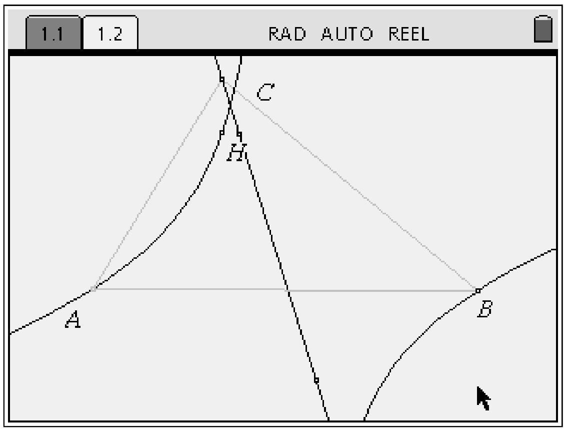
D'où $H\left(c\,;\dfrac{c(1-c)}{mc+p}\right)$. Le lieu de H est donc inclus dans la courbe ($\mathcal{C}$) d'équation $y = \dfrac{x-x^2}{mx+p}$.

Cette courbe ($\mathcal{C}$) peut être :

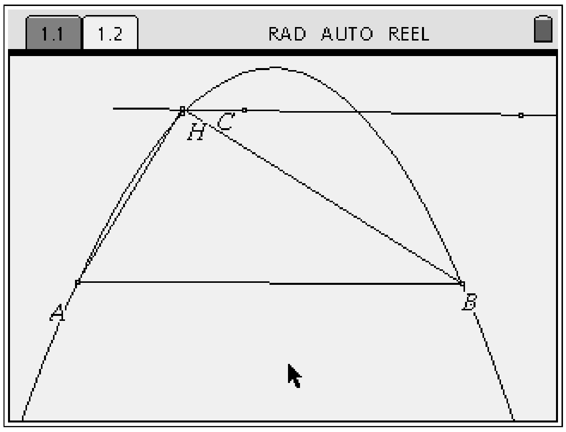
- Si $m = 0$ (dans ce cas, (d) est parallèle à (AB)) : une parabole passant par A et B ;
- Si $m \neq 0$,
  - si $p = 0$ (dans ce cas (d) passe par A) : la droite d'équation $y = \dfrac{1-x}{m}$ privée du point d'abscisse 0 ;
  - si $m = 1$ et $p = -1$: la droite d'équation $y = -x$ privée du point d'abscisse 1 ;
  - si $m = -1$ et $p = 1$: la droite d'équation $y = x$ privée du point d'abscisse 1 ;
  - dans les autres cas, ($\mathcal{C}$) est une hyperbole passant par A et B.

$2^{\text{ème}}$ cas : (d) est perpendiculaire à $\overrightarrow{AB}$

Dans ce cas, le lieu de H est inclus dans la droite (d).



(d) n'est pas parallèle à (AB),
cas où ($\mathcal{L}$) est inclus dans une hyperbole.



(d) est parallèle à (AB),
($\mathcal{L}$) est inclus dans une parabole.