PROFIL 2 : MODÉLISATION D'UNE ROUTE

Auteur : Christian Brucker

TI-Nspire™ CAS

Mots-clés : calcul formel, nombre dérivé, représentation graphique, dérivée.

Fichiers associés : modelisation_route_degre3.tns, modelisation_route_degre5.tns

1. Objectifs

- Percevoir la signification du nombre dérivé.
- Résoudre un problème ouvert : il s'agit pour l'élève de choisir le degré de la fonction polynôme et de définir des inconnues.
- Mettre en équation les contraintes.
- Résoudre un système.
- Utiliser le calcul formel pour sa résolution.

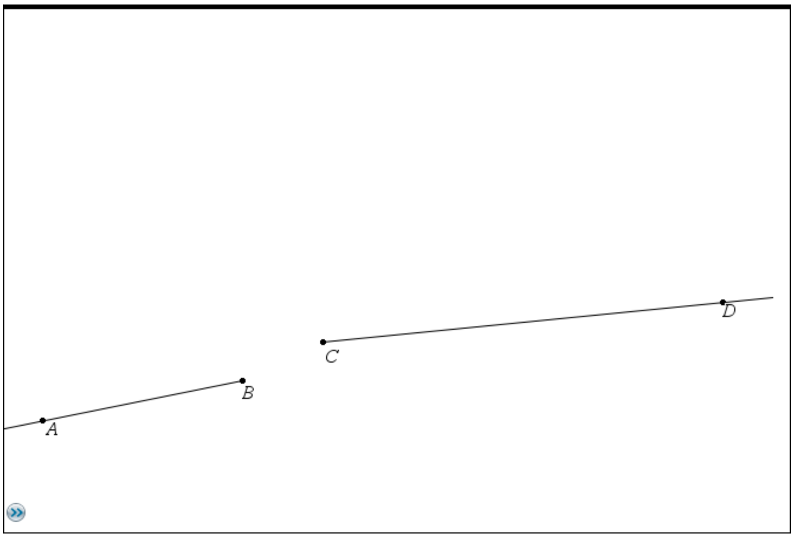
2. Énoncé

La coupe du raccordement de deux routes est indiquée par le schéma ci-contre.

Déterminer une fonction polynôme dont la courbe passe par les points B et C, et dont les tangentes en B et C sont les droites (AB) et (CD).

Dans un repère, on pourra, par exemple, prendre comme coordonnées :

A(–5 ; –1), B(0 ; 0),
C(2 ; 1) et D(12 ; 2).



3. Commentaires

Après une phase de recherche, une mise en commun sera certainement nécessaire pour que tous les élèves arrivent à traduire les hypothèses par un système.
Il sera nécessaire, si cela n'a pas été fait précédemment, d'expliquer comment résoudre un système.

La vérification graphique est un réel plus ; la TI-Nspire permet immédiatement la représentation de la courbe.

C'est là que serviront des fonctionnalités de la TI-Nspire qui facilitent beaucoup la tâche : le « copier/coller » (ctrl C, ctrl V) et le « sachant que » : |, accessible par **Alt Gr** + **6** sur l'ordinateur ou par une option de la fenêtre obtenue par ctrl = sur la calculatrice.

Pour aller plus loin, il est bien sûr possible d'augmenter le degré du polynôme cherché. On débouche alors sur une solution avec paramètre(s).
Commander ces paramètres à l'aide de curseurs permettra de trouver des solutions originales.

4. Conduite de l'activité

• Recherche d'une fonction polynôme du troisième degré

Notons $a3$, $a2$, $a1$ et $a0$ les coefficients de la fonction polynôme f cherchée, g sa fonction dérivée, $p1$ le coefficient directeur de la droite (AB) et $p2$ le coefficient directeur de la droite (CD).

Les élèves pourront au préalable, dans une phase de recherche, traduire les conditions sous forme mathématique. Le nombre de contraintes permet de penser à une fonction polynôme du troisième degré.

Définir f comme fonction polynôme du troisième degré :

$f(x):=a3\cdot x^3+a2\cdot x^2+a1\cdot x+a0$ ▸ *Terminé*

$g(x):=\frac{d}{dx}(f(x))$ ▸ *Terminé*

$g(x)$ ▸ $3\cdot a3\cdot x^2+2\cdot a2\cdot x+a1$

Recherche des coefficients directeurs des droites (AB) et (CD) :

$p1:=\frac{yb-ya}{xb-xa}|xa=-5 \text{ and } ya=-1 \text{ and } xb=0 \text{ and } yb=0$ ▸ $\frac{1}{5}$

$p2:=\frac{yc-yd}{xc-xd}|xc=2 \text{ and } yc=1 \text{ and } xd=12 \text{ and } yd=2$ ▸ $\frac{1}{10}$

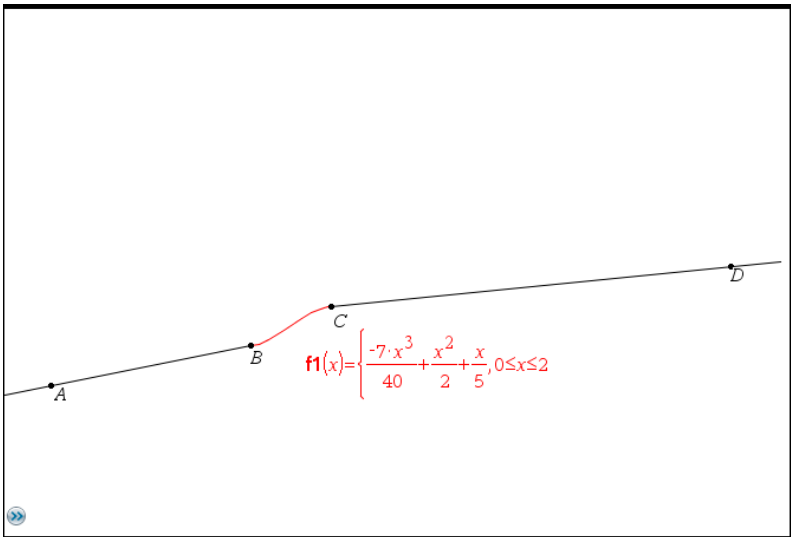
$\text{solve}\left(\begin{cases} f(0)=0 \\ f(2)=1 \\ g(0)=p1 \\ g(2)=p2 \end{cases}, a0,a1,a2,a3\right)$ ▸ $a0=0 \text{ and } a1=\frac{1}{5} \text{ and } a2=\frac{1}{2} \text{ and } a3=\frac{-7}{40}$

$a3\cdot x^3+a2\cdot x^2+a1\cdot x+a0|a0=0 \text{ and } a1=\frac{1}{5} \text{ and } a2=\frac{1}{2} \text{ and } a3=\frac{-7}{40}$ ▸ $\frac{-7\cdot x^3}{40}+\frac{x^2}{2}+\frac{x}{5}$

• Représentation graphique pour le degré 3

La représentation graphique permet de vérifier le résultat obtenu.

Le tracé d'une tangente en un point mobile de la courbe confirme que les contraintes qui concernent les deux tangentes sont vérifiées.



• Recherche d'une fonction polynôme du cinquième degré

Pour ceux qui souhaitent aller plus loin, une recherche de fonctions polynômes de degré 5 aboutira et permettra de trouver une infinité de solutions qui dépendent de 2 paramètres.

Définir f comme fonction polynôme de degré cinq :

$f(x):=a5\cdot x^5+a4\cdot x^4+a3\cdot x^3+a2\cdot x^2+a1\cdot x+a0$ ▸ *Terminé*

$g(x):=\frac{d}{dx}(f(x))$ ▸ *Terminé*

$g(x)$ ▸ $5\cdot a5\cdot x^4+4\cdot a4\cdot x^3+3\cdot a3\cdot x^2+2\cdot a2\cdot x+a1$

Recherche des coefficients directeurs des droites (AB) et (CD) :

$p1:=\frac{yb-ya}{xb-xa}|xa=-5 \text{ and } ya=-1 \text{ and } xb=0 \text{ and } yb=0$ ▸ $\frac{1}{5}$

$p2:=\frac{yc-yd}{xc-xd}|xc=2 \text{ and } yc=1 \text{ and } xd=12 \text{ and } yd=2$ ▸ $\frac{1}{10}$

$$\text{solve}\left(\begin{cases} f(0)=0 \\ f(2)=1 \\ g(0)=p1 \\ g(2)=p2 \end{cases}, a0,a1,a2,a3,a4,a5\right)$$

▸ $a0=0 \text{ and } a1=\frac{1}{5} \text{ and } a2=\frac{32\cdot c91+8\cdot c92+1}{2} \text{ and } a3=\frac{-(480\cdot c91+160\cdot c92+7)}{40}$ and $a4=c92$ and $a5=c91$

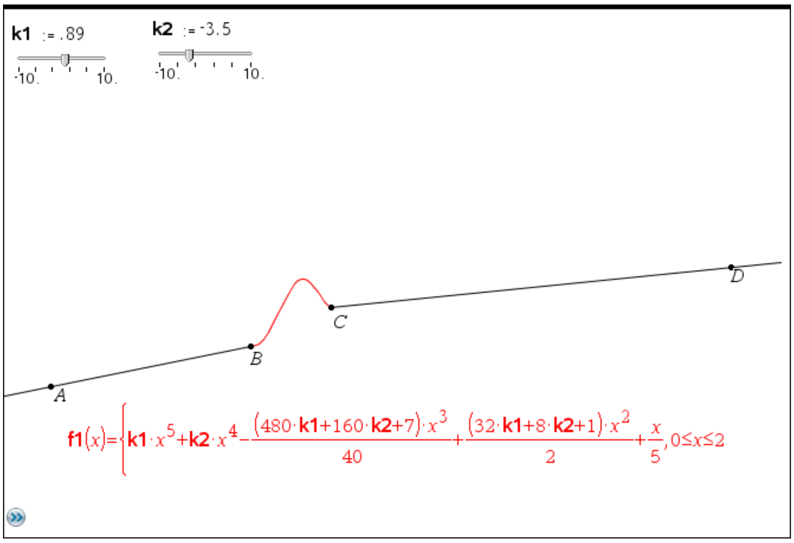
$a5\cdot x^5+a4\cdot x^4+a3\cdot x^3+a2\cdot x^2+a1\cdot x+a0|a0=0 \text{ and } a1=\frac{1}{5} \text{ and } a2=\frac{32\cdot c1+8\cdot c2+1}{2}$ and $a3=\frac{-(480\cdot c1+160\cdot c2+7)}{40}$ and $a4=c2$ and $a5=c1$

▸ $c1\cdot x^5+c2\cdot x^4-\frac{(480\cdot c1+160\cdot c2+7)\cdot x^3}{40}+\frac{(32\cdot c1+8\cdot c2+1)\cdot x^2}{2}+\frac{x}{5}$

• Représentation graphique pour le degré 5

Des curseurs permettent de représenter les solutions graphiquement.

Certaines des solutions obtenues ne conviennent sûrement pas dans la réalité pour raccorder deux routes !



Définir f comme fonction polynôme du troisième degré :

$f(x):=a3\cdot x^3+a2\cdot x^2+a1\cdot x+a0$ ▸ *Terminé*

$g(x):=\frac{d}{dx}(f(x))$ ▸ *Terminé*

$g(x)$ ▸ $3\cdot a3\cdot x^2+2\cdot a2\cdot x+a1$

Recherche des coefficients directeurs des droites (AB) et (CD) :

$\mathbf{p1}:=\frac{yb-ya}{xb-xa}|xa=-5 \text{ and } ya=-1 \text{ and } xb=0 \text{ and } yb=0 \quad ▸ \quad \frac{1}{5}$

$\mathbf{p2}:=\frac{yc-yd}{xc-xd}|xc=2 \text{ and } yc=1 \text{ and } xd=12 \text{ and } yd=2 \quad ▸ \quad \frac{1}{10}$

$\text{solve}\left(\begin{cases}\mathbf{f}(0)=0\\ \mathbf{f}(2)=1\\ \mathbf{g}(0)=\mathbf{p1}\\ \mathbf{g}(2)=\mathbf{p2}\end{cases},a0,a1,a2,a3\right) \quad ▸ \quad a0=0 \text{ and } a1=\frac{1}{5} \text{ and } a2=\frac{1}{2} \text{ and } a3=\frac{-7}{40}$

$a3\cdot x^3+a2\cdot x^2+a1\cdot x+a0|a0=0 \text{ and } a1=\frac{1}{5} \text{ and } a2=\frac{1}{2} \text{ and } a3=\frac{-7}{40} \quad ▸ \quad \frac{-7\cdot x^3}{40}+\frac{x^2}{2}+\frac{x}{5}$