3. Límites y Continuidad.

3.1 Definición de Límite y Límites Laterales

3.2 Funciones Continuas.

3.3 Asíntota Horizontal y Vertical.

3.4 Teoremas de Límites.

3.5 Limites de Funciones Algebraicas y Trascendentes.

Introducción.

El presente trabajo muestra una propuesta para el manejo conceptual del conocimiento matemático como parte del proceso de transformación de la Calculadora en una herramienta de aprendizaje, su tendencia es hacia una manipulación correcta de los procesos algebraicos paso a paso, ya que en caso de cometerse errores, estos serán detectados de manera inmediata, con la practica continua, el estudiante descubrirá que la Calculadora es un excelente aliado para adquirir aprendizajes significativos.
El material facilita el aprendizaje de los temas más no sustituyen al Capitulo de Límites de un libro de Cálculo Diferencial, se centra en CAS y apoya en el ambiente Gráfico y Tabular.

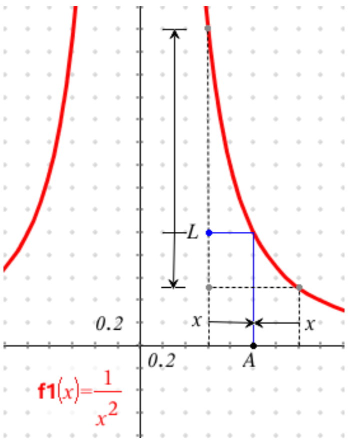
El material pretende:

- Comprender el concepto de límite y continuidad de funciones para preparar la introducción a la definición de Derivada.
- Procesar e interpretar los conceptos de límite y continuidad en forma numérica, grafica y analítica.
- Comprender y manejar el lenguaje matemático referente al tema de Límites para dar respuesta a las actividades presentadas.
- Manipular del lenguaje lógico matemático, en la construcción de soluciones a los ejercicios planteados.
- Analizar la factibilidad de la solución.
- Manejar los conceptos previos y del tema de forma integral.

Producto del aprendizaje.

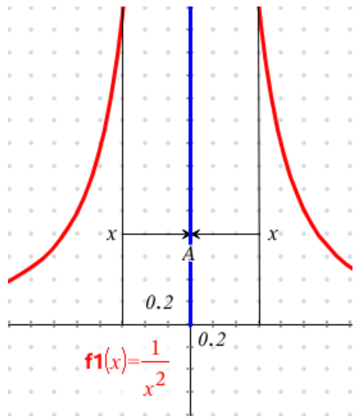
1. *Respuestas de los cuestionarios, verificadas con la tecnología en sus diferentes representaciones.*
2. *Contestar los ejercicios* 3.1 *en el Documento* "Limites 1.tns" *de la Calculadora.*
3. *Contestar los ejercicios* 3.2 y 3.3 *en el Documento* "Limites 2–3.tns" *de la Calculadora.*
4. *Contestar los ejercicios* 3.5 *en el Documento* "Limites 5.tns" *de la Calculadora.*

3.1 DEFINICIÓN DE LÍMITE.



DEFINICIÓN DE LIMITE: Se dice que una constante A es el *Límite* de una variable x cuando ésta se aproxima a aquélla, de modo que la diferencia $x - A$, en valor absoluto, puede hacerse tan pequeña como se quiera. Esto se expresa $x \to A$, o bien

$$\text{Lim } x = A$$



Se dice que la variable L se hace infinita cuando llega a ser mayor, en valor absoluto, que cualquier número dado por grande que sea.

Si los valores de L se conservan positivos escribiremos $L \to +\infty$, y si los valores de L se conservan negativos escribiremos $L \to -\infty$.

La graficas de la función $f1(x) = \frac{1}{x^2}$, observamos que: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

Si $f(x)$ tiende hacia el limite L a medida que x tiende hacia el limite A, esto se expresa por la notación

$$\lim_{x \to A} f(x) = L$$

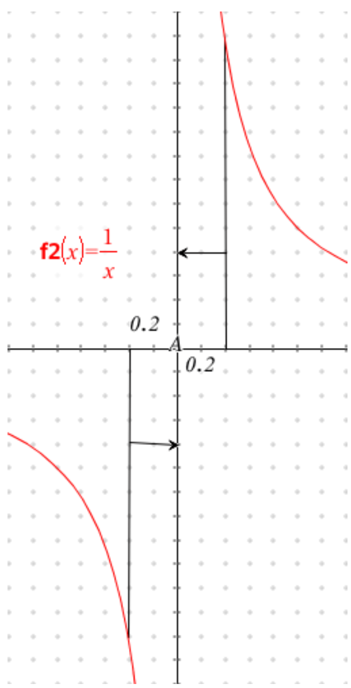
El Límite en general, es el valor al que tiende una función al aproximarse la variable independiente a cierto valor A .

La graficas de la función $f2(x) = \frac{1}{x}$, y en la cual observamos que:

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}$ No existe , ¿Por qué? ________________

____

____



¿Existen funciones a las cuales no se les pueda aplicar la DEFINICIÓN DE LÍMITE? ________
Justifica tu respuesta utilizando lo aprendido en intervalos y funciones____________________

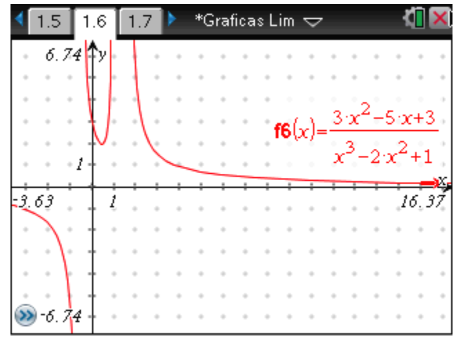
____

Proponer dos funciones diferentes a $f1(x)$, $f2(x)$ en donde no exista el límite

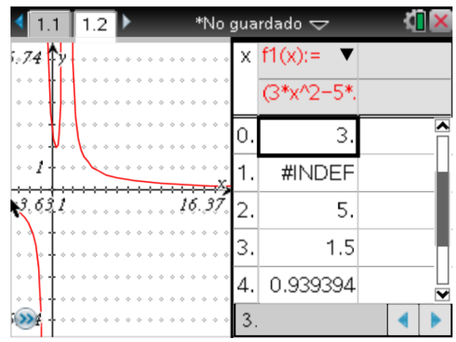
______________________________ ______________________________

PARA LLENAR UNA TABLA EN LA CALCULADORA.

1. GRAFICAMOS LA Función.

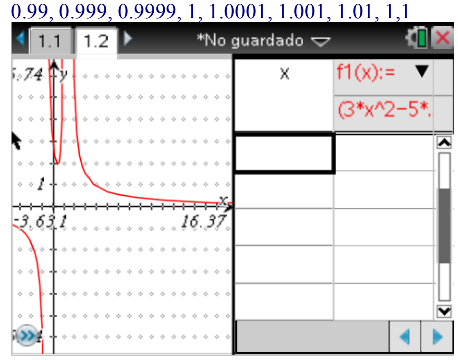


2. PRESIONAMOS LA TECLA menu 2 A



3. PRESIONAMOS LAS TECLAS menu 5 5 Y CAMBIAR LA VARIABLE INDEPENDIENTE A Pregunta

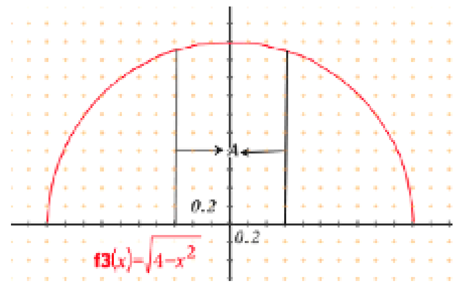
4. Estamos listos para capturar los valores de 0.9, 0.99, 0.999, 0.9999, 1, 1.0001, 1.001, 1.01, 1,1



Llena las tres tablas para la siguiente función: $f(x)=\sqrt{4-x^2}$, cuando x se aproxima a 0, cuando x se aproxima a -2, y cuando x se aproxima a 2.

Cuando x se aproxima a cero.

$f(x)$	x
	$-0.1\downarrow$
	-0.01
	-0.001
	$-0.0001.$
$Lim(x\to 0)$	0
	-0.0001
	-0.001
	-0.01
	$-0.1\uparrow$



1. ¿Que sucedió cuando calculaste los cuatro primeros valores (*límite por la izquierda*)?

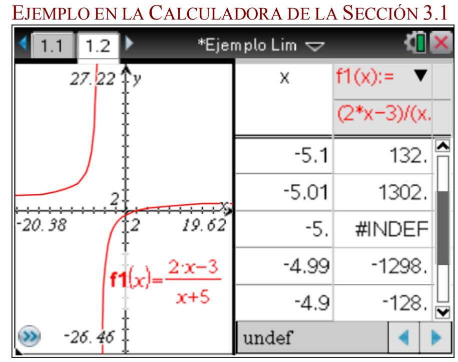
2. ¿Que sucedió cuando calculaste los cuatro segundos valores (*límite por la derecha*)?

3. ¿Existe algo en común con los dos limites anteriores?

4. ¿Si el valor al que se aproximo por la izquierda es igual al valor que se aproximo por la derecha que puedes concluir?

5. ¿Que diferencia hay entre la tabla que acabas de llenar con la tablas que llenaste en funciones?

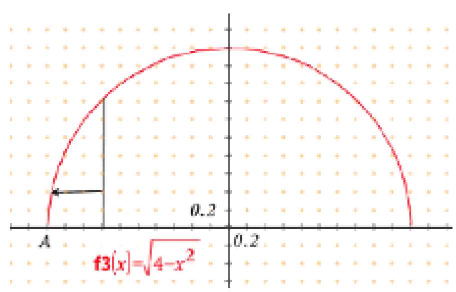
EJEMPLO EN LA CALCULADORA DE LA SECCIÓN 3.1



CUANDO X SE APROXIMA A MENOS DOS

$f(x)$	x
	$-2.1\downarrow$
	-2.01
	-2.001
	$-2.0001.$
$Lim(x\to -2)$	0
	-1.9999
	-1.999
	-1.99
	$-1.9\uparrow$

.



1. ¿Que sucedió con los cuatro primeros valores (*límite por la izquierda*)?

2. ¿Que sucedió cuando calculaste los cuatro segundos valores (*límite por la derecha*)?

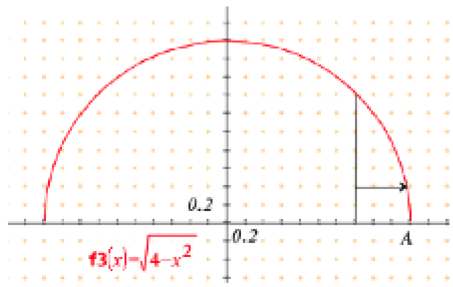
3. ¿Cual fue la razón por lo que no pudiste calcular los primeros cuatro valores?

4. ¿Cuál es el dominio de la función?

5. ¿Cuál es tu conclusión?

CUANDO X SE APROXIMA A DOS.

$f(x)$	x
	$1.9\downarrow$
	1.99
	1.999
	1.9999
$Lim(x\to 2)$	0
	2.0001
	2.001
	2.01
	$2.1\uparrow$



1. ¿Que sucedió con los cuatro primeros valores (*límite por la izquierda*)?

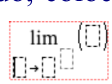
2. ¿Que sucedió cuando calculaste los cuatro segundos valores (*límite por la derecha*)?

3. ¿Cual fue la razón por lo que no pudiste calcular los segundos cuatro valores?

4. ¿Cuál es el dominio de la función?

5. ¿Cuál es tu conclusión?

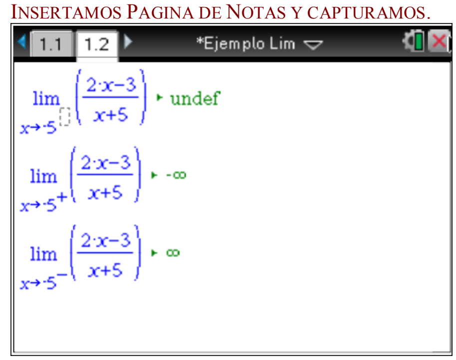
Ejercicios 3.1

Verifica en Notas cuales cumplen la DEFINICIÓN DE LÍMITE, las que no tienen solución, aplica el Limite Lateral derecho o izquierdo, colocando en el recuadro del exponente un signo + o – según sea el caso 

1. $\lim\limits_{x\to -2} 2\sqrt{x+2}$ 2. $\lim\limits_{x\to \frac{4}{3}} \sqrt{9x^2-16}$ 3. $\lim\limits_{x\to 1}\begin{cases} 1\cdot x^0 \,|\, x\le 1 \\ 2\cdot x^0 \,|\, x>1 \end{cases}$ 4. $\lim\limits_{x\to -7}\sqrt{\dfrac{3x-5}{x+7}}$

Construye una tabla adecuada para cada Límite.

INSERTAMOS PAGINA DE NOTAS Y CAPTURAMOS.



Anota los ocho intervalos básicos.

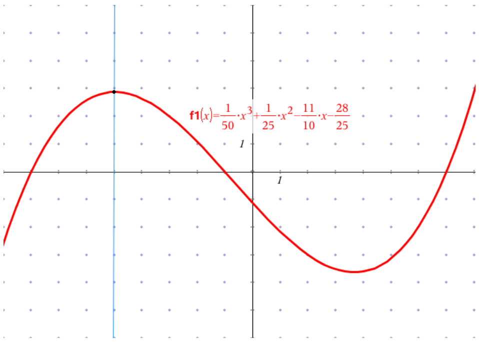
________________________________ ________________________________

Proporciona un conjunto de funciones donde el Dominio de cada función este relacionado con cada uno de los intervalos básicos.

Determina si hay condiciones que debe tener cada una de la funciones, para aplicar la DEFINICIÓN DE LIMITE?

Para que exista limite unilateral, ¿Cuál es la condición? ________________

3.2 FUNCIONES CONTINUAS.



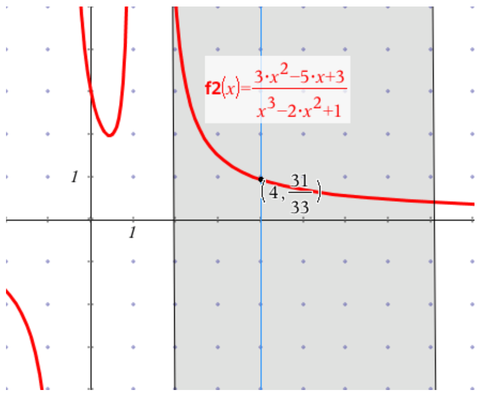
Definición "intuitiva". Es una función cuya gráfica puede dibujarse sin levantar el lápiz del papel.

Continuidad en un punto. El análisis de la definición de continuidad nos muestra que para ser continua en el punto a, una función debe satisfacer las siguientes tres condiciones:

a) La función f debe estar definida en a, (de modo que $f(a)$ exista).

b) Debe existir el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a.

c) Los números de las condiciones a), b) deben ser iguales $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$



Continuidad en un intervalo. Una función es continua en un intervalo I, si en continua en cada punto de I.

Como no existe una definición formal de discontinuidad se toma como definición de **discontinuidad**, la negación de continuidad. Ahora bien si la función es discontinua, podemos tratar los siguientes conceptos:

Ejercicios 3.2

Abre el archivo Limites 2-3.tns y Grafica las funciones en color azul y determina si las funciones son continuas o discontinuas; si son discontinuas localiza el valor de x.

Nota: El archivo consta de 14 páginas, una para cada función, en dos columnas la izquierda para **Notas** y la derecha para **Graficas**.

$$f1(x)=3x^2+7x+12$$

$$f2(x)=-2\sqrt{x-2}+3$$

$$f3(x)=\frac{(x-1)^7}{(2x-5)^4}$$

$$f4(x)=\frac{x^2+2x-8}{x^3-2x^2}$$

$$f5(h)=\frac{\frac{1}{\sqrt{9+h}}-\frac{1}{3}}{h}$$

$$f6(y)=\frac{\frac{1}{y}-\frac{1}{3}}{y-3}$$

$$f7(x)=\frac{x^2+x-2}{x^2-4x+3}$$

$$f8(x)=\frac{(x-2)^2}{x^4-16}$$

$$f9(x)=\sqrt[3]{\frac{x^2-4}{(x+2)^2}}$$

$$f10(x)=\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$$

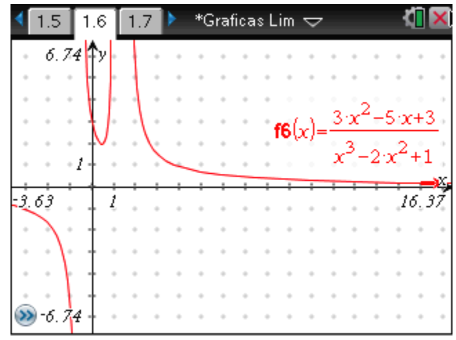
$$f11(\theta)=\frac{1-\cos(\theta)}{\theta\cdot \operatorname{sen}(\theta)}$$

$$f12(x)=\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x}$$

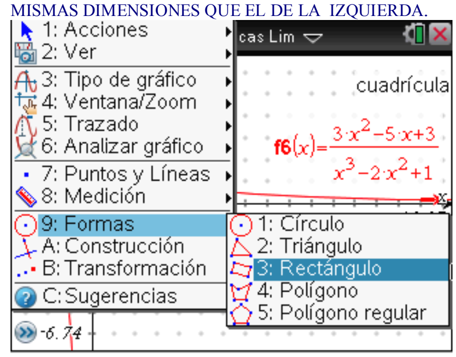
$$f13(x)=\frac{4x+5}{2x+3}$$

$$f14(x)=\frac{1-\cos(x)}{x}$$

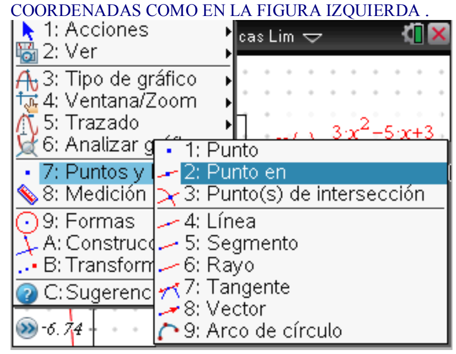
1. GRAFICAMOS LA Función



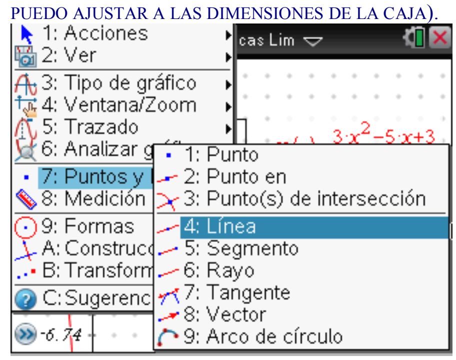
2. PRESIONAMOS LA TECLA menu PARA ACCEDER A Formas Rectángulo Y LO CONSTRUIMOS DE LAS MISMAS DIMENSIONES QUE EL DE LA IZQUIERDA.



3. PRESIONAMOS LA TECLA menu PARA ACCEDER A Puntos y Líneas Punto en Y COLOCAMOS UN PUNTO SOBRE LA GRÁFICA, CERCANO A 4, ESC; SEÑALAMOS EL TEXTO DE LAS COORDENADAS Y PRESIONAMOS DOBLE CLIC ENCIMA DEL VALOR DE X Y LUEGO PRESIONAMOS 4, QUEDANDO LAS COORDENADAS COMO EN LA FIGURA IZQUIERDA .

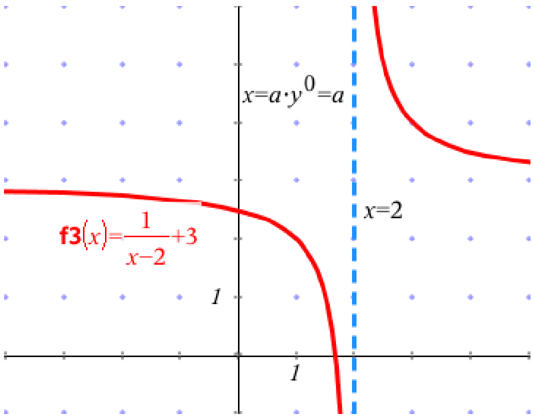


4. PRESIONAMOS LA TECLA menu PARA ACCEDER A Puntos y líneas Línea Y TRAZAMOS UNA LÍNEA VERTICAL SOBRE EL PUNTO, ESC (SI NOS COLOCAMOS EN LOS EXTREMOS DE LA LÍNEA LA PUEDO AJUSTAR A LAS DIMENSIONES DE LA CAJA).



5. COLOCA EL CURSOR SOBRE EL PUNTO Y DESLIZALO POR EL INTERVALO.

3.3 ASÍNTOTA HORIZONTAL Y VERTICAL.



La recta $x=a$ es una **asíntota vertical** de la gráfica de la función $f(x)$ si al menos uno de los siguientes enunciados es verdadero:

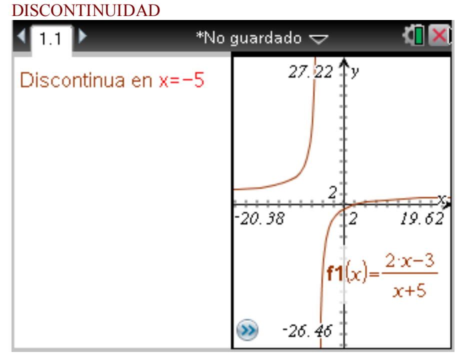
a. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$

b. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$

c. $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$

d. $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$

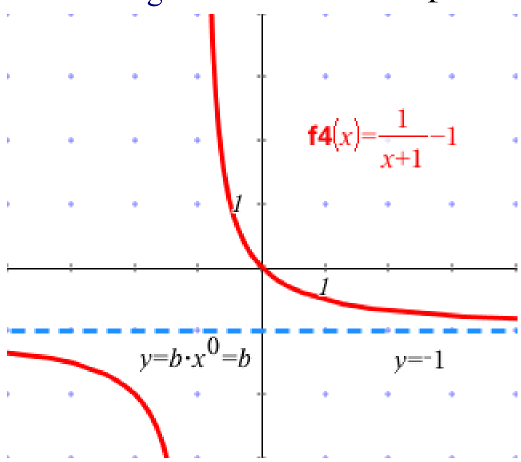
SE REGRESA A LA GRAFICA Y SE LOCALIZA LA DISCONTINUIDAD



La recta $y=b$ es una asíntota horizontal de la gráfica de la función f si al menos una de las proposiciones siguientes es verdadera.

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$, para algún número N, si $x>N$, entonces $f(x)\neq b$

b. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$, para algún número N, si $x>N$, entonces $f(x)\neq b$

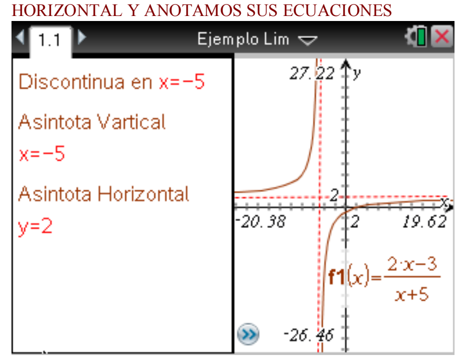


Ejercicios 3.2

En las graficas de la sección 2.1 determina cuales son asintóticas y traza en grafica la(s) asíntota(s) vertical(es) u horizontal(es), en Notas has tus observaciones y colaca las ecuaciones de las asíntotas.

$$f1(x)=3x^2+7x+12$$
$$f2(x)=-2\sqrt{x-2}+3$$
$$f3(x)=\frac{(x-1)^7}{(2x-5)^4}$$
$$f4(x)=\frac{x^2+2x-8}{x^3-2x^2}$$
$$f5(h)=\frac{\frac{1}{\sqrt{9+h}}-\frac{1}{3}}{h}$$
$$f6(y)=\frac{\frac{1}{y}-\frac{1}{3}}{y-3}$$
$$f7(x)=\frac{x^2+x-2}{x^2-4x+3}$$
$$f8(x)=\frac{(x-2)^2}{x^4-16}$$
$$f9(x)=\sqrt[3]{\frac{x^2-4}{(x+2)^2}}$$
$$f10(x)=\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$$
$$f11(\theta)=\frac{1-\cos(\theta)}{\theta\cdot \operatorname{sen}(\theta)}$$
$$f12(x)=\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x}$$
$$f13(x)=\frac{4x+5}{2x+3}$$
$$f14(x)=\frac{1-\cos(x)}{x}$$

TRAZAMOS LAS ASINTOTAS VERTICAL Y HORIZONTAL Y ANOTAMOS SUS ECUACIONES



NOTA: Revisa las respuestas de la secciónes 3.2 y 3.3. Verifica que en tus Notas utilizaste el lenguaje matemático correcto, además de que **Notas** y **Graficas** representan lo mismo.

3.4 TEOREMAS DE LÍMITES.

$$\lim_{x\to c} b = b; \quad \lim_{x\to c} x = c; \quad \lim_{x\to c} x^n = c^n; \quad \lim_{x\to c} f(x) = L; \quad \lim_{x\to c} g(x) = K;$$

$$\lim_{x\to c}\left(b\cdot f(x)\right) = b\cdot L; \qquad \lim_{x\to c}\left(f(x)+g(x)\right) = L+K;$$

$$\lim_{x\to c}\left(f(x)\cdot g(x)\right) = L\cdot K; \quad \lim_{x\to c}\left(f(x)\right)^n = L^n; \quad \lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{k} \ \big|\, k \neq 0;$$

EJEMPLOS.

1. $\lim_{x\to 2}\left(2\cdot x^3-3\cdot x^2+1\right)$

$\lim_{x\to 2}\left(2\cdot x^3-3\cdot x^2+1\right)=\lim_{x\to 2}\left(2\cdot x^3\right)-\lim_{x\to 2}\left(3\cdot x^2\right)+\lim_{x\to 2}(1)$ ▸ true — $\lim_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim_{x\to a}\left(f(x)\right)+\lim_{x\to a}\left(g(x)\right)$

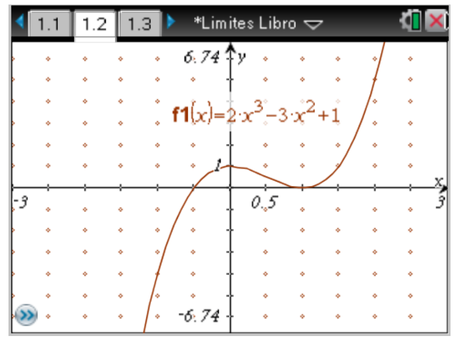
$\lim_{x\to 2}\left(2\cdot x^3\right)-\lim_{x\to 2}\left(3\cdot x^2\right)+\lim_{x\to 2}(1)=2\cdot\lim_{x\to 2}\left(x^3\right)-3\cdot\lim_{x\to 2}\left(x^2\right)+1$ ▸ true — $\lim_{x\to a}\left(c\cdot f(x)\right)=c\cdot\lim_{x\to a}\left(f(x)\right)$; $\lim_{x\to a}(c)=c$

$2\cdot\lim_{x\to 2}\left(x^3\right)-3\cdot\lim_{x\to 2}\left(x^2\right)+1=2\cdot 2^3-3\cdot 2^2+1$ ▸ true — $\lim_{x\to a}\left(x^n\right)=a^n$

$2\cdot 2^3-3\cdot 2^2+1=16-12+1$ ▸ true — Operaciones Aritméticas

$16-12+1=5$ ▸ true — Operaciones Aritméticas

$\therefore \lim_{x\to 2}\left(2\cdot x^3-3\cdot x^2+1\right)=5$ ▸ true — Conclusión



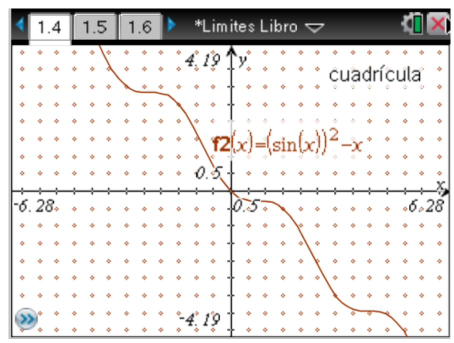
2. $\lim_{x\to \pi/2}\left(\sin(x)^2-x\right)$

$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\left((\sin(x))^2-x\right)=\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\left((\sin(x))^2\right)-\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}(x)$ ▸ true — $\lim_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim_{x\to a}\left(f(x)\right)+\lim_{x\to a}\left(g(x)\right)$

$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\left((\sin(x))^2\right)-\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}(x)=\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^2-\frac{\pi}{2}$ ▸ true — $\left(\lim_{x\to a}\left(f(x)\right)^n=f(a)^n\right)$; $\lim_{x\to a}(x)=a$

$\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^2-\frac{\pi}{2}=1-\frac{\pi}{2}$ ▸ true — Nota: $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ▸ 1; Operación Trigonométrica

$\therefore \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\left((\sin(x))^2-x\right)=1-\frac{\pi}{2}$ ▸ true — Conclusión



Si aplicamos la tercera condición de continuidad:

$$\underset{x\to a}{Lim}\, f(x)=f(a)$$

entonces podemos sustituir de manera directa.

$\lim_{x\to 2}\left(2\cdot x^3-3\cdot x^2+1\right)=2\cdot 2^3-3\cdot 2^2+1$ ▸ true — Sustituimos

$2\cdot 2^3-3\cdot 2^2+1=5$ ▸ true — Operaciones Aritméticas para simplificar

$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\left((\sin(x))^2-x\right)=\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^2-\frac{\pi}{2}$ ▸ true — Sustituimos

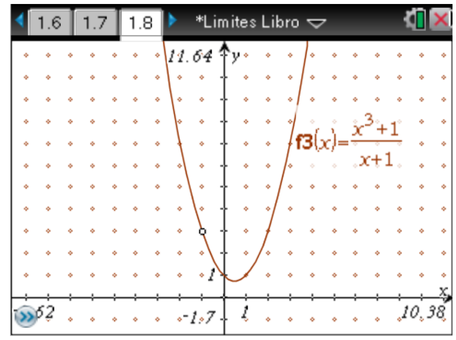
$\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^2-\frac{\pi}{2}=1-\frac{\pi}{2}$ ▸ true — Operaciones Trigonométricas para simplificar

3.5 LIMITES DE FUNCIONES ALGEBRAICAS Y TRASCENDENTES

Para comprender los Límites de Funciones Algebraicas por Factorización es necesario repasar el tema de simplificación de expresiones racionales en donde la factorización y las propiedades de los números nos permiten simplificar; que al sustituir no aparezca la indeterminación; ver al lado derecho la simplificación algebraica de una expresión racional.

SIMPLIFICACIÓN DE EXPRESIÓN ALGEBRAICA

$\frac{x^3+1}{x+1}=\frac{(x+1)\cdot(x^2-x+1)}{x+1}$	true
$\frac{(x+1)\cdot(x^2-x+1)}{x+1}=(x+1)\cdot\frac{1}{x+1}\cdot(x^2-x+1)$	true
$(x+1)\cdot\frac{1}{x+1}\cdot(x^2-x+1)=1\cdot(x^2-x+1)$	true
$1\cdot(x^2-x+1)=x^2-x+1$	true



Limites más comunes

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{c}{x}\right)=\infty \qquad \frac{c}{0}=\infty$

$\lim_{x\to 0}(c\cdot x)=\infty \qquad c\cdot\infty=\infty$

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{c}\right)=\infty \qquad \frac{\infty}{c}=\infty$

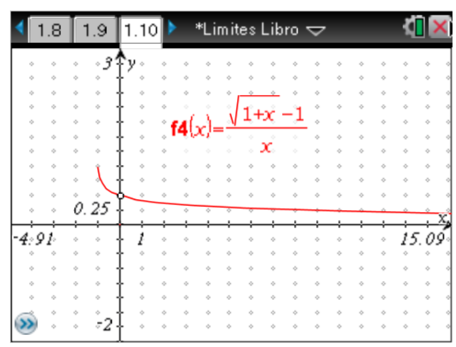
$\lim_{x\to \infty}\left(\frac{c}{x}\right)=0 \qquad \frac{c}{\infty}=0$

EJEMPLOS

3. $\lim_{x\to -1}\left(\frac{x^3+1}{x+1}\right)$ Sustituimos $\frac{(-1)^3+1}{-1+1}$ ▸ undef	
$\lim_{x\to -1}\left(\frac{x^3+1}{x+1}\right)=\lim_{x\to -1}\left(\frac{(x+1)\cdot(x^2-x+1)}{x+1}\right)$ ▸ true	$\frac{(a+b)^3}{a+b}\|a\neq -b=a^2-a\cdot b+b^2 \;\therefore\; (a+b)^3=(a+b)\cdot(a^2-a\cdot b+b^2)$
$\lim_{x\to -1}\left(\frac{(x+1)\cdot(x^2-x+1)}{x+1}\right)=\lim_{x\to -1}(x^2-x+1)$ ▸ true	$x\cdot\frac{1}{x}=1:\quad 1\cdot x=x$ Para simplificar
$\lim_{x\to -1}(x^2-x+1)=(-1)^2--1+1$ ▸ true	$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to a}(f(x))+\lim_{x\to a}(g(x));\quad \lim_{x\to a}(x^n)=a^n;$ $\lim_{x\to a}(x)=a;\quad \lim_{x\to a}(c)=c$
$(-1)^2--1+1=3$ ▸ true	Operaciones Aritméticas
$\therefore\ \lim_{x\to -1}\left(\frac{x^3+1}{x+1}\right)=3$ ▸ true	Conclusión

Para comprender los Límites de Funciones Racionales tenemos como prerrequisito al tema expresiones racionales, potencias y radicales, factorización y las propiedades de los números; para expresar las fracciones algebraicas en un formato diferente que al sustituir no aparezca la indeterminación.

4. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}\right)$ Sustituimos $\frac{\sqrt{1+0}-1}{0}$ ▸ undef	
$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}\cdot\frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1}\right)$ ▸ true	$x=1\cdot x;\qquad x\cdot\frac{1}{x}=1\|x\neq 0$
$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}\cdot\frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x-1}{x\cdot(\sqrt{1+x}+1)}\right)$ ▸ true	$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2;\qquad (\sqrt{x})^2\|x\geq 0$
$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x-1}{x\cdot(\sqrt{1+x}+1)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{x\cdot(\sqrt{1+x}+1)}\right)$ ▸ true	$a+(-a)=0;\qquad 0+x=x$
$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{x\cdot(\sqrt{1+x}+1)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}\right)$ ▸ true	$x\cdot\frac{1}{x}=1\|x\neq 0;\qquad x=1\cdot x$
$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+0}+1}$ ▸ true	Sustituimos
$\frac{1}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{1}{2}$ ▸ true	$0+x=x$; Operaciones Aritméticas
$\therefore\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}\right)=\frac{1}{2}$ ▸ true	Concluimos



5. $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}\right)$ Sustituimos $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{a}}{a-a}$

$\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}\right)=\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{a})^2}\right)$ ▸ true $x=(\sqrt{x})^2|x\geq 0$

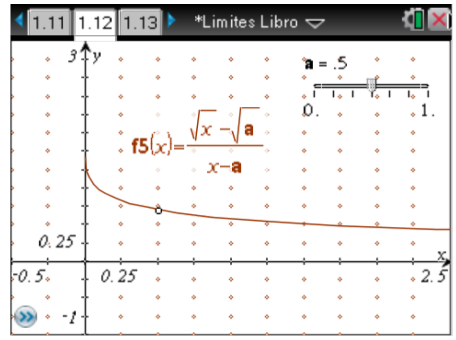
$\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{a})^2}\right)=\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{1\cdot(\sqrt{x}-\sqrt{a})}{(\sqrt{x}-\sqrt{a})\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{a})}\right)$ ▸ true $a^2-b^2=(a+b)\cdot(a-b)$

$\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{1\cdot(\sqrt{x}-\sqrt{a})}{(\sqrt{x}-\sqrt{a})\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{a})}\right)=\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\right)$ ▸ true $x\cdot\dfrac{1}{x}=1|x\neq 0$; $x=\cdot 1x$

$\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a}}$ ▸ true Sustituimos

$\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a}}=\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{a}}$ ▸ true Operaciones aritméticas

$\therefore\ \lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}\right)=\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{a}}$ ▸ true Concluimos



La constante a acepta cualquier valor: Si ___ No ___

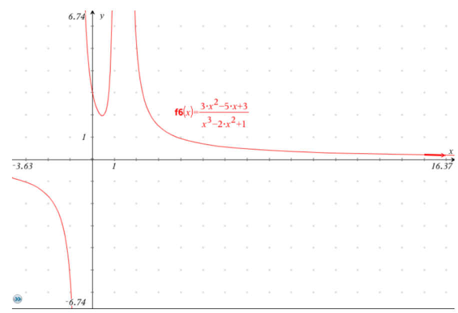
Si la respuesta es No ¿Cuál es el intervalo de valores que acepta? ________

La función $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$ es discontinua: Si ___ No ___

Si la respuesta es Si ¿en qué valor es discontinua? ___

¿Cuántas graficas representa la función $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$ Una__ Infinitas ___

Justifica tu respuesta: ____



EJERCICIOS

1. Analiza la siguiente expresión algebraica:

   a) Divide algebraicamente la siguiente expresión $\dfrac{x+1}{x-2}$

   b) Si la consideramos como una función $y=\dfrac{x+1}{x-2}$

   c) y la graficamos como una función racional, ¿Cuánto vale el límite de la función cuando x tiende a tres en la gráfica.

   d) Calcula $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+1}{x-2}$

   e) Calcula $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+1}{x-2}$

2. Resuelve los siguientes límites en forma analítica.

   a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{x-2}=$

   b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1}=$

   c) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-729}{\sqrt{x}-3}=$

   d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{3/4}+1}{x^{5/2}-2x}=$

Para comprender los Límites de Fracciones Complejas además de repasar el tema de simplificación de expresiones racionales, potencias y radicales, y las propiedades de los números nos permiten expresar las fracciones complejas en un formato diferente que al sustituir no aparezca la indeterminación.

6. $\lim_{x\to 2}\left(\dfrac{\frac{4}{x}-\frac{4x}{x+2}}{\frac{x^2-4}{x-2}}\right)$ Sustituimos $\dfrac{\frac{4}{2}-\frac{4\cdot 2}{2+2}}{\frac{2^2-4}{2-2}}$ ▸ undef

$\lim_{x\to 2}\left(\dfrac{\frac{4}{x}-\frac{4\cdot x}{x+2}}{\frac{x^2-4}{x-2}}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\dfrac{\frac{4\cdot(x+2)-4\cdot x\cdot x}{x\cdot(x+2)}}{\frac{(x-2)\cdot(x+2)}{x-2}}\right)$ ▸ true

$\lim_{x\to 2}\left(\dfrac{\frac{4\cdot(x+2)-4\cdot x\cdot x}{x\cdot(x+2)}}{\frac{(x-2)\cdot(x+2)}{x-2}}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\dfrac{\frac{4\cdot x+8-4\cdot x^2}{x\cdot(x+2)}}{(x+2)\cdot 1}\right)$ ▸ true

$\lim_{x\to 2}\left(\dfrac{\frac{4\cdot x+8-4\cdot x^2}{x\cdot(x+2)}}{(x+2)\cdot 1}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\dfrac{\frac{4\cdot x+8-4\cdot x^2}{x\cdot(x+2)}}{\frac{x+2}{1}}\right)$ ▸ true

$\lim_{x\to 2}\left(\dfrac{\frac{4\cdot x+8-4\cdot x^2}{x\cdot(x+2)}}{\frac{x+2}{1}}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\dfrac{4\cdot x+8-4\cdot x^2}{x\cdot(x+2)^2}\right)$ ▸ true

$\lim_{x\to 2}\left(\dfrac{4\cdot x+8-4\cdot x^2}{x\cdot(x+2)^2}\right)=\dfrac{0}{32}$ ▸ true

$\dfrac{0}{32}=0$ ▸ true

$\therefore\ \lim_{x\to 2}\left(\dfrac{\frac{4}{x}-\frac{4\cdot x}{x+2}}{\frac{x^2-4}{x-2}}\right)=0$ ▸ true

Para comprender los Límites al Infinito dividimos entre x^n, donde n es el exponente más grande de cada término, desapareciendo así la indeterminación.

6. $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2-5x+3}{x^3-2x^2+1}\right)$ Sustituimos $\dfrac{3\cdot\infty^2-5\cdot\infty+3}{\infty^3-2\cdot\infty^2+1}$ ▸ undef

$\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{3\cdot x^2-5\cdot x+3}{x^3-2\cdot x^2+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{\frac{3\cdot x^2-5\cdot x+3}{x^3}}{\frac{x^3-2\cdot x^2+1}{x^3}}\right)$ ▸ true

Dividimos entre el exponente de mayor grado que es: x^3

$\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{\frac{3\cdot x^2-5\cdot x+3}{x^3}}{\frac{x^3-2\cdot x^2+1}{x^3}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}+\frac{3}{x^3}}{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}}\right)$ ▸ true

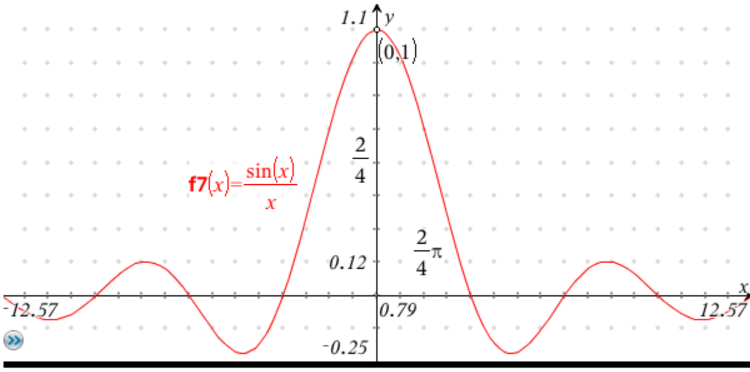
$\dfrac{a+b+c}{d}=\dfrac{a}{d}+\dfrac{b}{d}+\dfrac{c}{d}$

$\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}+\frac{3}{x^3}}{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}}\right)=\dfrac{0-0+0}{1-0+0}$ ▸ true; $\dfrac{0-0+0}{1-0+0}=0$ ▸ true

$\dfrac{c}{\infty}=0$; Sustituimos; Operaciones aritméticas

$\therefore\ \lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{3\cdot x^2-5\cdot x+3}{x^3-2\cdot x^2+1}\right)=0$ ▸ true

Concluimos



x	f7(x):= sin(x)/x
-π/2	0.63662
-π/4	0.900316
-π/8	0.974495
-π/16	0.993587
-π/32	0.998394
-π/64	0.999598
-π/128	0.9999
0	#INDEF
π/128	0.9999
π/64	0.999598
π/32	0.998394
π/16	0.993587
π/8	0.974495
π/4	0.900316
π/2	0.63662
π	0.

Teoremas de Límites trigonométricos especiales

a) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right) = 1$; **b)** $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1-\cos(x)}{x} \right) = 0$

Se verificar el inciso **a)** de forma gráfica y tabular.

EJERCICIOS 3.5

1.- $\lim\limits_{x \to 0} (3x^2 + 7x + 12)$

2.- $\lim\limits_{x \to -2} (x^2 - 4)$

3.- $\lim\limits_{x \to 3} \frac{(x-1)^7}{(2x-5)^4}$

4.- $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^3 - 2x^2}$

5.- $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{9+h}} - \frac{1}{3}}{h}$

6.- $\lim\limits_{y \to 3} \frac{\frac{1}{y} - \frac{1}{3}}{y-3}$

7.- $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 4x + 3}$

8.- $\lim\limits_{x \to 2} \frac{(x-2)^2}{x^4 - 16}$

9.- $\lim\limits_{x \to -2} \sqrt[3]{\frac{x^2 - 4}{(x+2)^2}}$

10.- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$

11.- $\lim\limits_{\theta \to 0} \frac{1 - \cos(\theta)}{\theta \operatorname{sen}(\theta)}$

12.- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x}$

13.- $\mathop{Lim}\limits_{x \to \infty} \left(\frac{4x+5}{2x+3} \right)$

14.- $\mathop{Lim}\limits_{x \to \infty} \left(\frac{ax^4 + bx^2}{dx^3 + h} \right)$

15.- $\mathop{Lim}\limits_{y \to \infty} \left(\frac{4y^3 - 5}{6y^5 - y} \right)$

16.- $\mathop{Lim}\limits_{h \to 0} \left(\frac{(x+h)^n - x^n}{h} \right)$

17.- $\mathop{Lim}\limits_{h \to 0} \left(\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \right)$

19.- Dado $f(x) = x$, demostrar que: $\mathop{Lim}\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 2x$

20.- Si $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, demostrar: $\mathop{Lim}\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 2a \cdot x + b$

21.- Dado $f(x) = \frac{1}{x}$, demostrar que: $\mathop{Lim}\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = -\frac{1}{x^2}$