

EP 004 – 2007 : Solutions d'une équation

Auteur du corrigé : Alain Soléan

TI-Nspire™ CAS

Avertissement : ce document a été réalisé avec la version 1.4 ; il est disponible dans sa version la plus récente sur le site <http://education.ti.com/france>, menu Ressources pédagogiques.

Fichier associé : EP004_2007_SolEquation_CAS.tns

1. Le sujet

Sujet 004 de l'épreuve pratique 2007 – Nombre de solutions d'une équation

Énoncé

On donne un réel k .

On s'intéresse au nombre de solutions de l'équation (E) : $\ln(x) = kx^2$ pour k strictement positif.

1. En utilisant un logiciel de construction graphique ou une calculatrice graphique :

- Conjecturer, suivant les valeurs de k , le nombre de solutions de l'équation (E).
- Si $k > 0$, trouver graphiquement une valeur approchée de k pour laquelle l'équation (E) a une unique solution.

2. Démontrer que pour $k < 0$, l'équation (E) a une unique solution.

Production demandée

- Pour la question 1. b), recopier la valeur approchée obtenue pour k .
- Réponse écrite pour la question 2.

Compétences évaluées

- Compétences TICE**
 - Représenter graphiquement des courbes, à l'aide d'un logiciel.
 - Faire une lecture graphique.
- Compétences mathématiques**
 - Interpréter et résoudre graphiquement une équation.
 - Elaborer une stratégie pour la résoudre.

2. Corrigé

Les écrans sont obtenus à partir de la calculatrice.

1) Ouvrir une page **Graphiques & géométrie**.

Construire les **courbes** des fonctions f_1 et f_2 définies par :

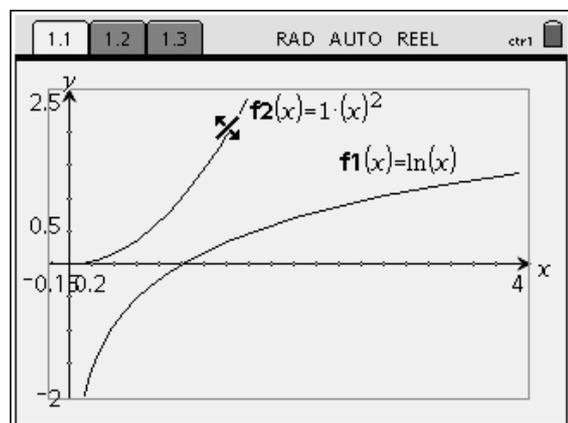
$$f_1(x) = \ln(x),$$

$$f_2(x) = kx^2 \text{ avec } k = 1.$$

Choisir une **Fenêtre** adaptée ; sur l'image ci-contre,

Xmin = -0.2, **Xmax** = 4, **Ymin** = -2 et **Ymax** = 2.5 .

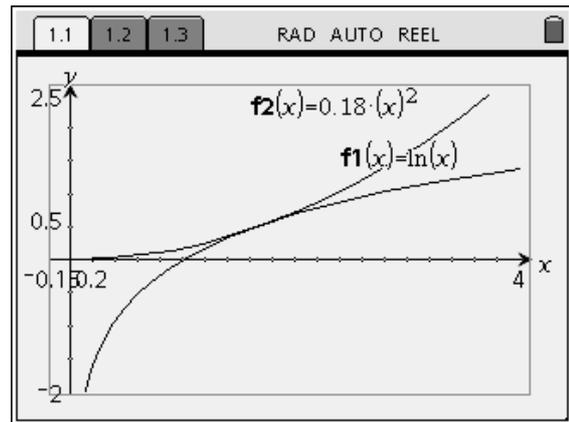
Avec l'outil **Pointeur**, en choisissant la courbe de la fonction f_2 , on peut faire varier la valeur de k . Il faut obtenir le symbole du curseur comme ci-contre.



On peut conjecturer qu'il existe une valeur de k , notée k_0 , telle que :

- Si $k > k_0$, (E) n'a aucune solution.
- Si $k = k_0$, (E) a une solution unique.
- Si $0 < k < k_0$, (E) a deux solutions.

Cette valeur k_0 cherchée semble être peu différente de 0,18 (cf. écran ci-contre).



2) Pour démontrer que, si $k < 0$, (E) possède une unique solution, on peut considérer la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $x \mapsto g(x) = \ln(x) - kx^2$ (fonction continue et dérivable sur $]0; +\infty[$).

Les solutions de (E) seront les solutions de l'équation $g(x) = 0$.

Ouvrir une page **Calculs. Définir** g .

Demander le calcul de la **Dérivée** de g .

Donner une écriture de $g'(x)$ avec un **dénominateur commun**.

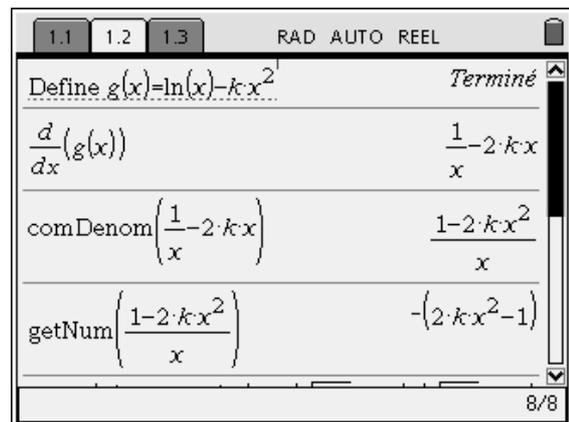
On a, si $k < 0$, $g'(x) > 0$ sur $]0; +\infty[$.

Donc g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

De plus on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty.$$

L'équation $g(x) = 0$ n'admet une et une seule solution sur $]0; +\infty[$.



3. Pour aller plus loin

On peut, avec l'étude de la fonction g , déterminer la valeur exacte de la constante k_0 déterminée graphiquement à la question 1), lorsque $k > 0$, et ainsi valider la conjecture émise sur le nombre de solutions de l'équation (E).

Revenir à la page **Calculs** précédente.

A l'aide de **Nombre, Outils Fraction, Capturer numérateur** (instruction `getNum`), saisir le dénominateur de l'expression obtenue et **Factoriser** ce numérateur (voir page suivante).

Il apparaît que $g'(x)$ possède le même signe que $1 - x\sqrt{2k}$ sur $]0; +\infty[$ donc :

$$g'(x) > 0 \text{ sur }]0; \frac{1}{\sqrt{2k}}[\quad \text{et} \quad g'(x) < 0 \text{ sur }]\frac{1}{\sqrt{2k}}; +\infty[.$$

De là g admet un maximum en $x = \frac{1}{\sqrt{2k}}$.

Ce maximum vaut :

$$M = g\left(\frac{1}{\sqrt{2k}}\right) = -\frac{1}{2}(\ln(k) + \ln(2) + 1).$$

- Si $M < 0$, (E) n'a aucune solution.
- Si $M = 0$, (E) a une unique solution.
- Si $M > 0$, (E) a deux solutions.

$$\text{Or } M = 0 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2e}.$$

La conjecture de la question 1 est bien confirmée et la valeur de k_0 est $\frac{1}{2e} \approx 0,1839$.

