

EP 024 - 2009 : Étude d'une courbe de Bézier

Auteur du corrigé : Alain SOLEAN

TI-Nspire™ CAS

Avertissement : ce document a été réalisé avec la version 1.7**Fichier associé** : EP024_2009_Bezier_CAS.tns

1. Le sujet

Sujet 024 de l'épreuve pratique 2009 – Étude d'une courbe de Bézier

Énoncé

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points A de coordonnées $(0 ; 6)$, B de coordonnées $(2 ; 0)$ et C de coordonnées $(4 ; 6)$.

Soit t un réel de l'intervalle $[0 ; 1]$. On définit les points :

- G barycentre du système de points pondérés $\{(A; 1 - t); (B; t)\}$;
- H barycentre du système de points pondérés $\{(B; 1 - t); (C; t)\}$;
- M barycentre du système de points pondérés $\{(G; 1 - t); (H; t)\}$.

Le but de l'exercice est d'étudier le lieu des points M quand t décrit l'intervalle $[0 ; 1]$, et la position de cet ensemble par rapport aux droites (AB) et (BC).

Partie A

1. Réaliser la figure avec un logiciel de géométrie dynamique.
Tracer les droites (AB) et (BC), puis faire apparaître le lieu décrit par le point M lorsque t varie.
2. Quelle semble être la position des droites (AB) et (BC) par rapport au lieu obtenu ?
3. Sur quelle courbe semble se déplacer le point M?

Partie B

4. Déterminer en fonction de t les coordonnées des points G, H et M.
5. Valider ou invalider la conjecture émise à la question 3.
Donner l'expression analytique du lieu du point M.

Production demandée

- Visualisation du lieu du point M.
- Énoncé des conjectures : courbe décrite par le point M et position des droites (AB) et (BC) par rapport à cette courbe.
- Réponses pour les questions 4. et 5.

Compétences évaluées

- Effectuer des constructions géométriques à l'aide d'un logiciel.
- Définir un barycentre de deux points du plan par ses coordonnées.
- Connaître l'équation cartésienne d'une parabole.

2. Corrigé

Partie A

- 1) Ouvrir une page **Graphiques & géométrie**.

Placer trois points A, B et C :   (Points et droites)  (Point).

Faire afficher les coordonnées des points placés :

menu **1** (Actions) **7** (Coord. et eq.).

Puis modifier ces coordonnées afin de placer les points comme le désire l'énoncé.

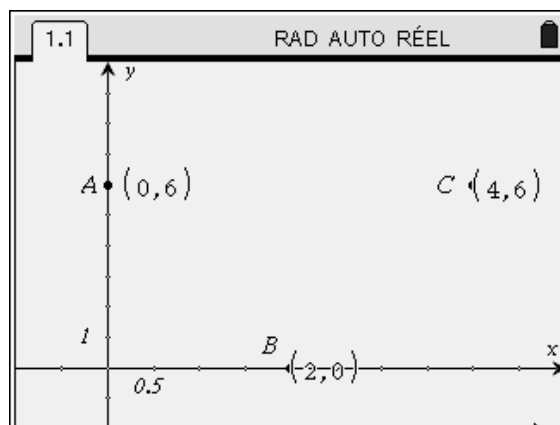
Régler la fenêtre :

menu **4** (Fenêtre) **1** (Réglages de la fenêtre).

Ci contre la fenêtre est réglée avec les paramètres :

XMin = - 1 ; **XMax** = 5 ; **YMin** = - 2 ; **YMax** = 10.

Cacher la ligne de saisie : **ctrl** **G**.



Pour construire les points G, H et M on utilise les

relations barycentriques qui nous permettent d'écrire :

pour G : $\overrightarrow{AG} = t \overrightarrow{AB}$, pour H : $\overrightarrow{BH} = t \overrightarrow{BC}$,

et pour M : $\overrightarrow{GM} = t \overrightarrow{GH}$.

Créer un curseur :

menu **1** (Actions) **A** (Contrôle curseur).

Effectuer le réglage du curseur :

ctrl **menu** **1** (Réglages).

Choisir comme **Variable** : t ; **Valeur** : un réel entre 0 et 1 ; **Minimum** : 0 et **Maximum** : 1.

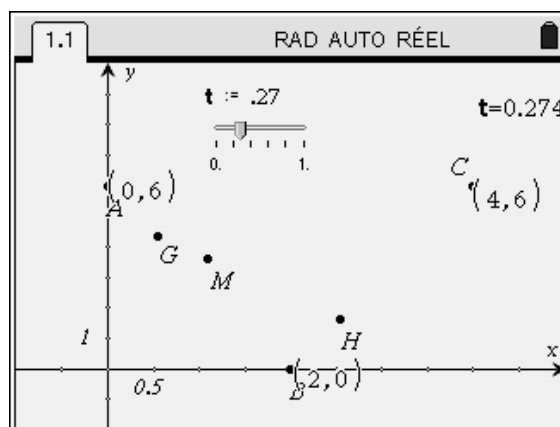
Créer un texte : **menu** **1** (Actions) ; inscrire t puis demander de le calculer : **menu** **1** (Actions) **8** (Calculer), enfin choisir L.

Construction des points G, H et M :

menu **A** (Transformations) **5** (Homothétie).

Choisir le centre, le rapport (t) et le point à transformer.

Pour t , choisir la valeur inscrite à côté du texte et non pas le curseur.



Construction des droites (AB) et (BC) :

menu **6** (Points et droites) **4** (Droite).

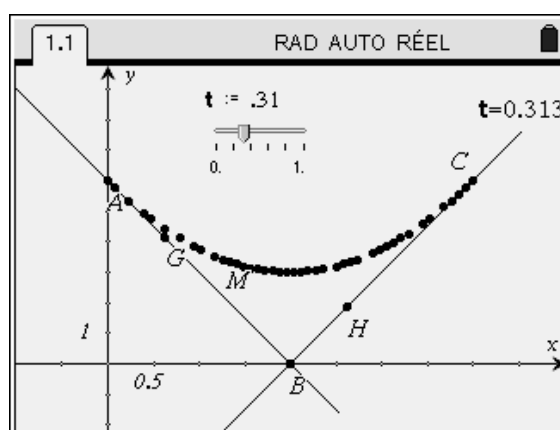
Faire apparaître la trace du point M :

menu **5** (Trace) **3** (Trace géométrique).

On obtient les positions du point M en animant le curseur.

2) Les droites (AB) et (BC) semblent être tangentes au lieu obtenu.

3) Le point M semble se déplacer sur une parabole.



Partie B

4) Coordonnées des points G, H et M en fonction de t

Ouvrir une nouvelle page **Calculs**.

Saisir les coordonnées des points A, B et C sous forme de vecteurs, a , b et c ; le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a alors pour coordonnées $b - a = ab$.

Et le point G défini par $\overrightarrow{AG} = \alpha \overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\alpha \cdot ab + a = g$ (le choix de t pour paramètre n'est pas possible car t est une variable affectée par le curseur).

1.1	1.2	RAD AUTO RÉEL
$[0 \ 6] \rightarrow a$	$[0 \ 6]$	
$[2 \ 0] \rightarrow b$	$[2 \ 0]$	
$b-a \rightarrow ab$	$[2 \ -6]$	
$[4 \ 6] \rightarrow c$	$[4 \ 6]$	
$\alpha \cdot ab + a \rightarrow g$	$[2 \cdot \alpha \ 6 - 6 \cdot \alpha]$	
$c-b \rightarrow bc$	$[2 \ 6]$	
$\alpha \cdot bc + b \rightarrow h$	$[2 \cdot \alpha + 2 \ 6 \cdot \alpha]$	
11/11		

De même le vecteur $\overrightarrow{BC}$ a pour coordonnées $c - b = bc$.

Le point H défini par $\overrightarrow{BH} = \alpha \overrightarrow{BC}$ a pour coordonnées $\alpha \cdot bc + b = h$.

Le vecteur $\overrightarrow{GH}$ a pour coordonnées $h - g = gh$.

Enfin le point M défini par $\overrightarrow{GM} = \alpha \overrightarrow{GH}$ a pour coordonnées $\alpha \cdot gh + g = m$.

On récupère l'ordonnée du point M dans la variable y en calculant le produit scalaire $\text{dotP}(m, [0 \ 1])^1$.

5) On obtient une équation de la courbe décrite par M en remplaçant α par $\frac{x}{4}$ dans l'expression de y :

$$y = \frac{3x^2}{4} - 3x + 6.$$

Cette équation est bien celle d'une parabole, donc la conjecture émise dans la question 3) est bien validée.

1.1	1.2	RAD AUTO RÉEL
$\alpha \cdot bc + b \rightarrow h$	$[2 \cdot \alpha + 2 \quad 6 \cdot \alpha]$	
$h - g \rightarrow gh$	$[2 \quad 12 \cdot \alpha - 6]$	
$\alpha \cdot gh + g \rightarrow m$	$[4 \cdot \alpha \quad 12 \cdot \alpha^2 - 12 \cdot \alpha + 6]$	
$\text{dotP}(m, [0 \quad 1]) \rightarrow y$	$12 \cdot \alpha^2 - 12 \cdot \alpha + 6$	
$y \alpha = \frac{x}{4}$	$\frac{3 \cdot x^2}{4} - 3 \cdot x + 6$	
5/11		

¹ On peut aussi transformer le vecteur en liste, et demander le deuxième élément de la liste :

mat ► list ([4 α 12 α^2 - 12 α + 6]) [2] → y