D2n – TRIANGLES DE PERIMETRE CONSTANT

Auteur : Alain SOLEAN **TI-Nspire™**

Thème : recherche de l'aire maximale de triangles isocèles de périmètre constant.

Fichier associé : D2n_PerimetreConstant.tns**.**

1. Enoncé

On considère les triangles isocèles ABC de sommet A dont le périmètre vaut 15 cm. Parmi ces triangles, quel est celui qui possède l'aire maximale ?

a) Construction de la figure
La figure pourra être construite avec un logiciel de géométrie (afin de pouvoir faire varier la longueur de la base).
Pour la suite du devoir, construire un tel triangle de base BC = 3 cm. Placer le point J milieu de $[BC]$.

b) Conjecture
Conjecturer, avec le logiciel de géométrie, la nature du triangle ABC d'aire maximale.

c) Détermination de l'aire du triangle *ABC* en fonction de BC
On appelle x la longueur de $[BC]$.

- Exprimer en fonction de x, la longueur des côtés $[AB]$ et $[AC]$.
- A quel intervalle x doit-il appartenir pour que le triangle ABC puisse être construit ?
- Exprimer en fonction de x les longueurs BJ et AJ.
- Exprimer enfin l'aire $S(x)$ du triangle ABC en fonction de x.

d) Courbe représentative de l'aire
A l'aide de la calculatrice, établir un tableau de valeurs de $S(x)$ à partir de $x = 0$ avec un pas de 0,25.
Tracer sur une feuille de papier millimétré la courbe représentant la fonction S dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,,\,\vec{j}\,)$. (Prendre 2 cm comme unité sur chacun des axes. Placer le point O en bas à gauche de la feuille) .
Contrôler le travail en faisant tracer la courbe sur la calculatrice.

e) Conclusion
Quel est le maximum de la fonction S ?
Pour quelle valeur de x est-il atteint ?
Quelle est la nature du triangle dans ce cas ?
Exprimer à l'aide d'une phrase la propriété ainsi vérifiée.

2. Commentaires

Les objectifs de ce devoir sont de conjecturer un résultat, construire une figure géométrique avec un logiciel, établir une formule littérale, construire une courbe point par point, exploiter la courbe pour rechercher un maximum et pour valider graphiquement une conjecture.

Dans la solution suivante, les images sont obtenues à partir de la calculatrice.

3. Réponses

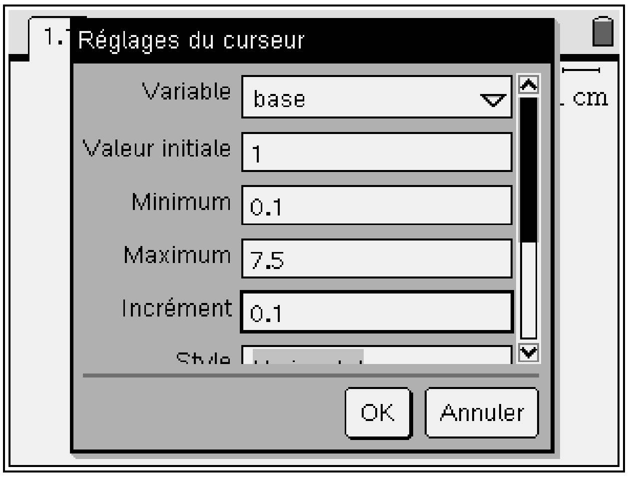
a) Construction de la figure

Ouvrir une page **Graphiques & géométrie**.
Afficher **Plan géométrique**.

Remarque préliminaire : la longueur de la « base » [*BC*] *ne peut pas être supérieure à* 7,5 *cm*.

Construire un curseur :

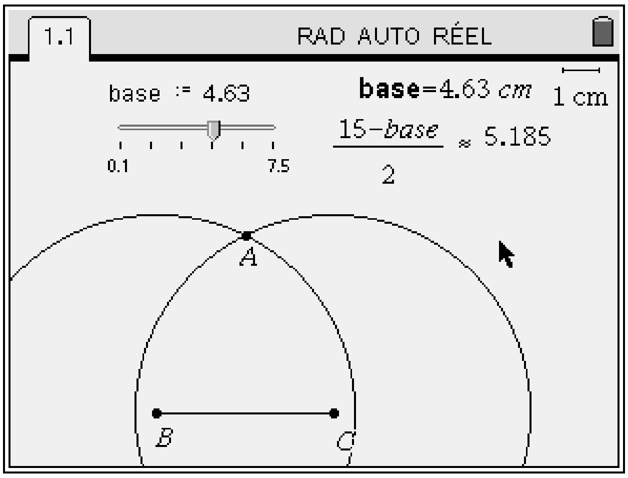
(menu) **1 : Actions** **A : Contrôle curseur**.



(ctrl)(menu) **1 : Réglages.**
Remplir comme ci-contre la boite de dialogue.

Remarque : la longueur minimale n'est pas 0 car, dans un tel cas, l'aire du triangle serait « indéfinie ».

Tracer un segment [*BC*], mesurer sa longueur et la lier à la variable *base*.
Si l'on bouge le curseur, le segment [*BC*] doit être automatiquement modifié.

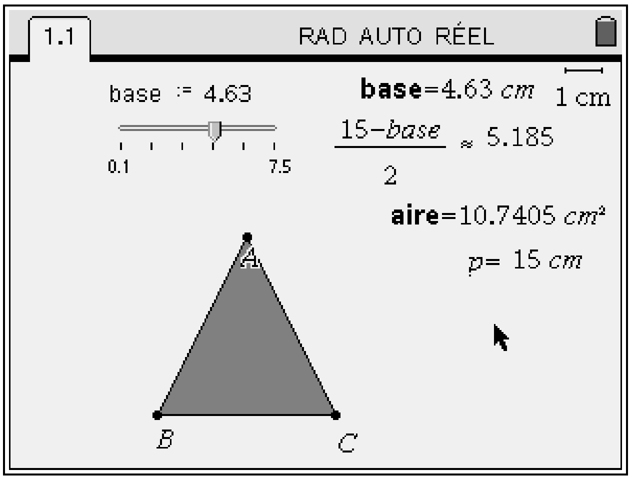


Créer le texte $\frac{15-\text{base}}{2}$, cette expression donne la longueur des côtés [*AB*] et [*AC*] lorsque *BC* = *base*, puis avec l'outil **Calculer** remplacer *base* par sa valeur.

Enfin avec l'outil **Compas** créer deux cercles de centre *B* et *C* et de rayon $\frac{15-x}{2}$, nommer *A* l'un des **Point d'intersection** de ces cercles.

b) Recherche de la conjecture

Définir le triangle *ABC*.
Demander son **Aire** et stocker le résultat dans la variable *aire*.



Sur l'image ci-contre les « objets inutiles » (cercles) ont été cachés et le périmètre *p* a été calculé pour vérifier qu'il reste constant.

Animer manuellement le curseur : on peut conjecturer ainsi que le triangle a une aire maximale lorsque *BC* = 5 et dans ce cas *ABC* est équilatéral.

c) Etude graphique de la variation de l'aire

On a $AB = AC = \dfrac{15 - x}{2}$; $x \in [0\ ;\ 7{,}5]$; $BJ = \dfrac{x}{2}$.

$AJ = \sqrt{\left(\dfrac{15 - x}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{x}{2}\right)^2}$

(Théorème de Pythagore dans le triangle *ABJ*)
d'où

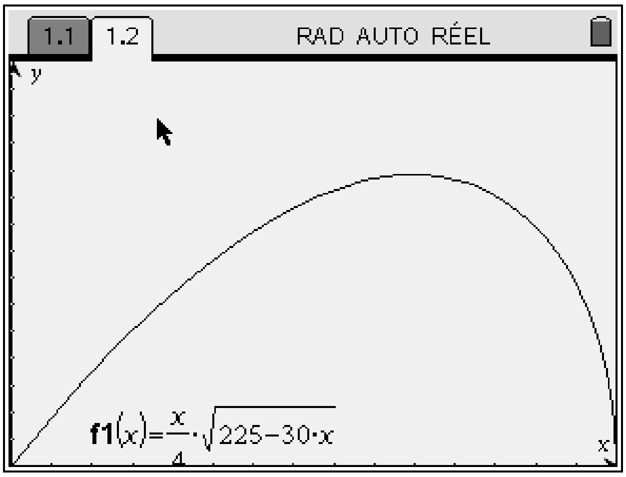
$S(x) = \dfrac{x}{2} * \sqrt{\left(\dfrac{15 - x}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{x}{2}\right)^2}$

$S(x) = \dfrac{x}{4} * \sqrt{225 - 30x}$

Ouvrir une nouvelle page **Graphiques & géométrie,** choisir le menu **Fonction** et écrire :

$$f_1(x) = \frac{x}{4} * \sqrt{225 - 30x}$$

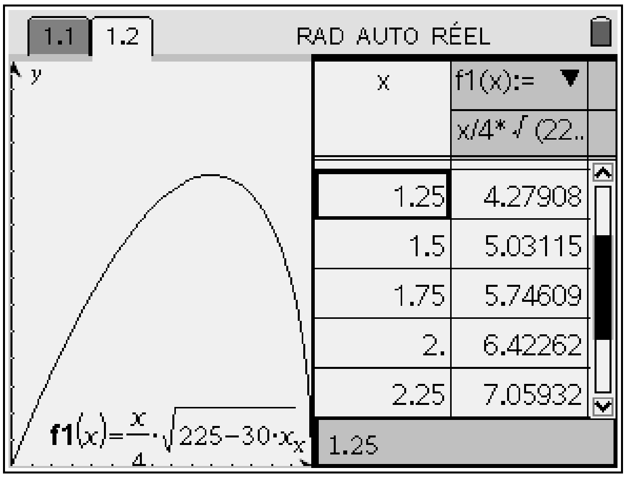
Puis dans le menu **Fenêtre – Réglages de la fenêtre** choisir
Xmin = 0, **Xmax** = 7,5,**Ymin** = 0, **Ymax** = 15 .
On obtient le tracé ci-contre



On peut rechercher le maximum de l'aire avec : **Actions – Ajouter un tableau de valeurs** et en règlant les paramètres du tableau (**Modifier les réglages de la fonction)** avec un Début de table à 0 et un Incrément de 0,25 .

On obtient l'écran ci-contre et on peut vérifier la conjecture faite : le maximum est obtenu pour $x = 5$, donc le triangle est équilatéral

Parmi les triangles isocèles de périmètre constant, celui qui possède une aire maximale est le triangle équilatéral.



Remarque :

On peut aussi obtenir les coordonnées du maximum de *f* en construisant un **Point sur** la courbe et en le déplaçant on obtient le maximum lorsque le symbole $\boxed{\text{M}}$ apparaît sur l'écran comme ci-contre.