EP 105 - 2009 : Une propriété de diviseurs

Auteur du corrigé : Alain SOLEAN **TI-Nspire™ CAS**

***Avertissement** : ce document a été réalisé avec la version* 1.7

Fichier associé : EP105_2009_Diviseurs_CAS.tns

1. Le sujet

Sujet 105 de l'épreuve pratique 2009 – Une propriété des diviseurs de certains entiers

Enoncé

On dit qu'un entier naturel non nul N est en division harmonique si le quotient du nombre de diviseurs de N par la somme des inverses des diviseurs de N est un entier (c'est-à-dire, que le nombre des diviseurs est un multiple de la somme des inverses des diviseurs).

Par exemple :
- 6 admet 4 diviseurs qui sont 1 ; 2 ; 3 et 6 ;
- la somme des inverses des diviseurs de 6 vaut : $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=2$;
- le quotient $\frac{4}{2}=2$ est un entier ;
- 6 est donc en division harmonique.

Partie A

1. À l'aide d'un logiciel adapté, dire si les nombres 32 et 140 sont en division harmonique.
2. Pour tout entier n non nul on pose $q_n = 2^{n+1} - 1$ et $a_n = 2^n q_n$.
a) Déterminer à l'aide du logiciel les quatre (ou cinq si possible) premières valeurs de n pour lesquelles q_n est un nombre premier.
b) Pour chacune des valeurs trouvées, calculer le nombre de diviseurs de a_n et la somme des inverses des diviseurs de a_n. Que peut-on conjecturer ?

Partie B

3. Soit p un nombre premier.
Montrer que p n'est pas en division harmonique.
4. On suppose que $q_n = 2^{n+1} - 1$ est premier.
a) Donner la liste des diviseurs de a_n en fonction de q_n.
b) Que peut-on conclure si la somme des inverses des diviseurs de a_n vaut 2 ?
c) Montrer que la situation précédente est vérifiée.

Production demandée

- Questions **3.** et **4**.

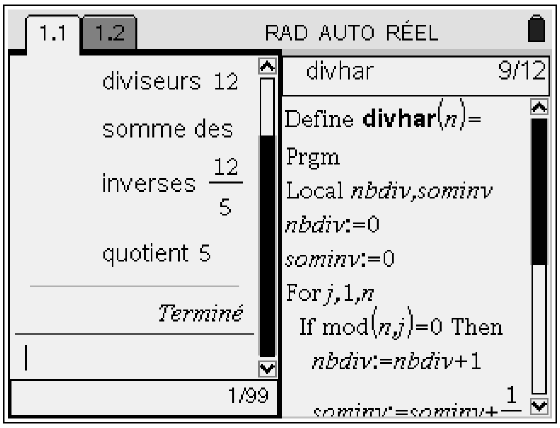
Compétences évaluées

- Utiliser un logiciel adapté à des opérations arithmétiques simples portant sur des entiers ;
- Savoir trouver l'ensemble des diviseurs d'un entier décomposé en facteurs premiers ;
- Connaître les résultats élémentaires concernant les suites géométriques.

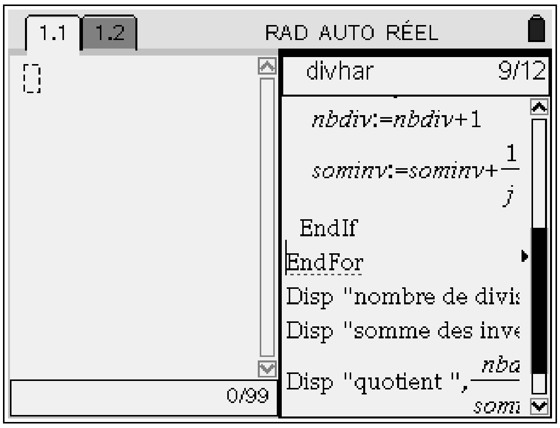
2. Corrigé

Partie A

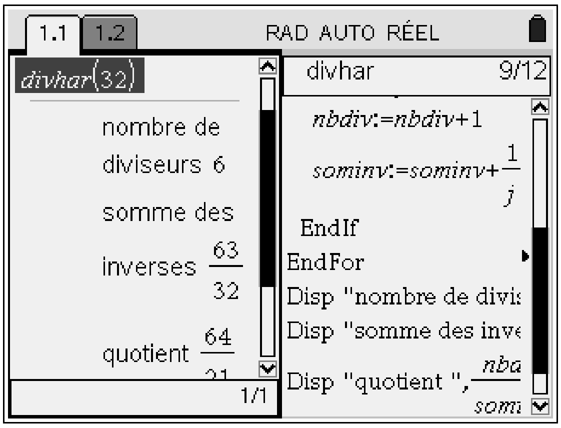
1) Réalisation d'un programme
Ce programme donnera le nombre des diviseurs d'un entier, la somme des inverses de ces diviseurs et le quotient de ces deux nombres.
Ouvrir une page **Calculs**.
menu 9 (**Fonctions et programmes**)
1 (**Éditeur de programmes**) ▸ (**Nouveau**) puis renseigner les items (Nom, choisir Programme et laisser **Aucun** pour **Accès à la bibliothèque**).

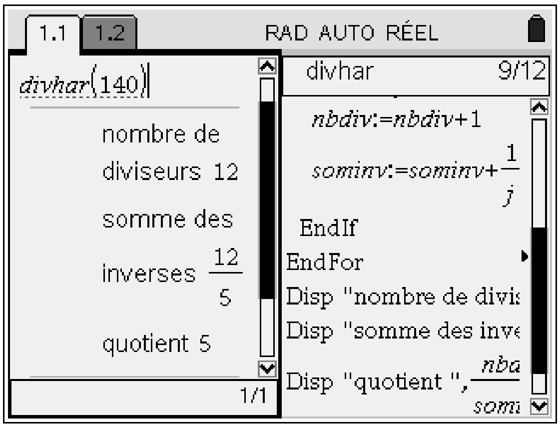


Ci-contre le listing du programme.
Nom : **divhar**(n), n étant l'entier pour lequel on veut savoir s'il est en division harmonique.
nbdiv, *sominv* sont respectivement les variables représentant le nombre de diviseurs de n et la somme de leurs inverses.

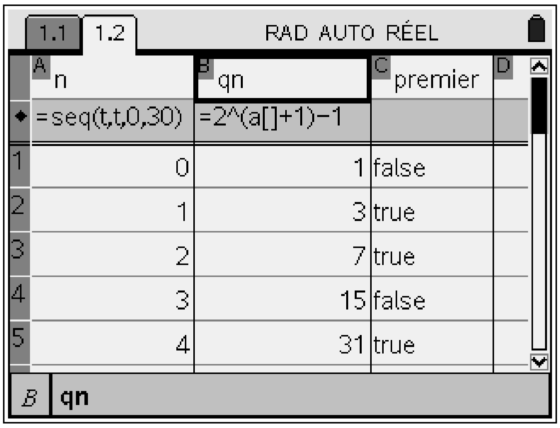


Pour l'appliquer, activer la fenêtre de gauche ctrl tab puis inscrire **divhar**(32) (voir ci-dessous), pour constater que 32 n'est pas en division harmonique.
En inscrivant **divhar**(140) (voir ci dessous à droite), on constate que 140 est en division harmonique.





2) a) Ouvrir une nouvelle page **Tableur & listes**.
Dans la cellule grisée de la colonne **A**, inscrire la formule : **=seq(t,t,0,30)** qui va faire apparaître la liste des entiers de 0 à 30 (on peut nommer cette colonne **n**).
Dans la cellule grisée de la colonne **B**, inscrire la formule : **=2^(a[]+1) – 1** qui nous donne les valeurs de q_n pour n de 0 à 30 (on peut nommer cette colonne **qn**).
Dans la cellule **C1**, inscrire la formule **=isprime(*b1*)** puis la recopier jusqu'à **C31** : si la réponse est « false » le nombre q_i n'est pas premier et si la réponse est « true » il est premier.



Ainsi, on peut constater que q_n est premier pour $n = 1$; $n = 2$; $n = 4$; $n = 6$ et $n = 12$ (les suivants étant $n = 16$, $n = 18$ et $n = 30$).

b) Pour calculer le nombre de diviseurs de a_n et la somme de leurs inverses, on fait fonctionner le programme précédent avec comme arguments a_1, a_4, …. On obtient les résultats suivants :

a_i	a_1	a_2	a_4	a_6	a_{12}
nombre de diviseurs	4	6	10	14	26
somme des inverses	2	2	2	2	2

On peut donc conjecturer que tous ces nombres sont en division harmonique, que la somme des inverses des diviseurs vaut toujours 2 et que le nombre de diviseurs semble être $2i+2$.

Partie B

3) Si p est premier, il possède 2 diviseurs, la somme des inverses vaut $1 + \frac{1}{p} = \frac{p+1}{p}$ et le quotient $\frac{2p}{p+1}$.

Si $p = 2$, ce quotient vaut $\frac{4}{3}$ et n'est pas entier ; si $p > 2$, ce quotient est simplifiable par 2 et vaut $\frac{p}{\frac{1}{2}(p+1)}$

qui n'est pas entier car p n'est divisible que par 1 et p donc pas par $\frac{1}{2}(p+1)$.

4) a) L'ensemble des diviseurs de a_n est : $\{2^k$ pour k variant de 0 à $n\} \cup \{2^k q_n$ pour k variant de 0 à $n\}$.

b) L'ensemble précédent contenant $2(n+1)$ éléments, si la somme des inverses vaut 2, le nombre a_n est donc en division harmonique.

c) Montrons que si q_n est premier, la somme des inverses de ses diviseurs vaut 2 :

On a $S_1 = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{2^k} = 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$. Si on note S la somme cherchée, S vaut alors $S = S_1 + \frac{1}{q_n} S_1$.

On a donc $S = \frac{q_n+1}{q_n} S_1$. Comme on a : $\frac{q_n+1}{q_n} = \frac{2^{n+1}}{2^{n+1}-1}$ et $S_1 = 2\left(\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}\right)$,

on a bien $S = 2$.

Les conjectures de la question **2) b)** sont donc bien validées.