# EP 007 - 2007 : Courbe de la fonction exponentielle

Auteur du corrigé : Alain Soléan **TI-Nspire™ CAS**

***Avertissement** : ce document a été réalisé avec la version 1.4 ; il est disponible dans sa version la plus récente sur le site http://education.ti.com/france, menu Ressources pédagogiques.*

**Fichier associé :** EP007_Exponentielle_CAS.tns

## 1. Le sujet

### Sujet 007 de l'épreuve pratique 2007 – Courbe représentative de la fonction exponentielle

### Enoncé

On désigne par $a$ un nombre réel.

Dans un repère orthonormal du plan, on considère la courbe $\mathcal{C}$, représentative de la fonction exponentielle et la droite $\mathcal{D}_a$ d'équation $y = a\,x$.

**1.** En utilisant un logiciel de construction graphique ou une calculatrice graphique, dire si les propositions suivantes semblent vraies ou fausses :

- *Proposition 1* : La courbe $\mathcal{C}$ est au dessus de $\mathcal{D}_1$.
- *Proposition 2* : Pour tout réel $x$, $e^x > 3x$.
- *Proposition 3* : Il existe une valeur $a$ pour laquelle $\mathcal{D}_a$ est tangente à la courbe $\mathcal{C}$.

**2.** En utilisant un logiciel de construction graphique ou une calculatrice graphique, conjecturer suivant les valeurs du réel $a$, la position relative de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}_a$ .

**3.** Justifier la proposition 3 de la question **1**.

## Production demandée

- Réponse écrite pour la question **3**.

## Compétences évaluées

- **Compétences TICE**
  - Représenter graphiquement des courbes et leurs tangentes en un point donné ;
  - Emettre et tester des conjectures ;
  - Utiliser un tableau de valeurs pour expliciter un contre exemple.
- **Compétences mathématiques**
  - Connaître les propriétés de la fonction exponentielle ;
  - Faire le lien entre position relative de courbes et inégalités ;
  - Faire le lien entre dérivée en un point et tangente à la courbe.

## 2. Corrigé

*Les écrans sont obtenus à partir de la calculatrice.*

**1)** Ouvrir une page **Graphiques & géométrie**.

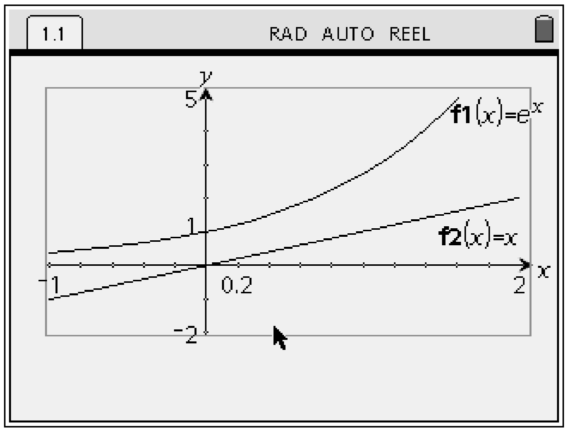
**Définir** les fonctions $f_1(x) = e^x$ et $f_2(x) = x$, régler la **Fenêtre**.

Dans l'image ci-dessous, la fenêtre choisie est définie par :

**XMin** = –1 ; **XMax** = 2 ; **YMin** = –2 et **YMax** = 5.

D'après le graphique, on peut conjecturer que la *Proposition 1* est **vraie**.

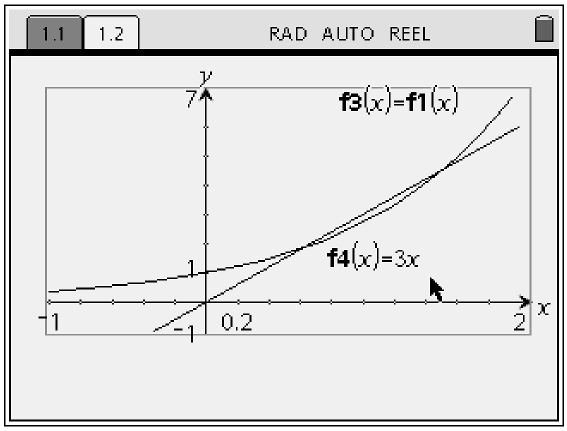



Pour le démontrer, on considère la fonction $g$ définie, pour tout réel $x$, par $g\ (x) = e^{x} - x$, dérivable pour tout $x$ réel.

$g'(x) = e^{x} - 1$ d'où $g'(x) \geq 0$ pour $x \geq 0$ et $g'(x) < 0$ pour $x < 0$.

Donc $g$ admet un minimum en $x = 0$ et ce minimum vaut $g\ (0) = 1$ donc $g\ (x) > 0$ pour tout $x$ réel.

Pour émettre une conjecture concernant la *Proposition 2*, **Définir** les fonctions $f_3(x) = f_1\ (x)$ et $f_4(x) = 3x$.



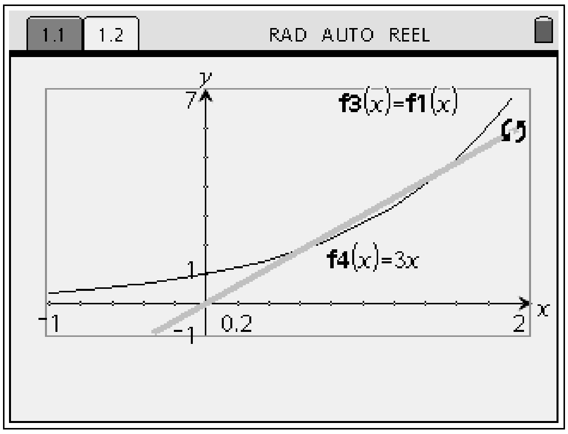

Ci-contre, la **Fenêtre** a été modifiée et on a choisi :
**XMin** = –1 ; **XMax** = 2 ; **YMin** = –1 et **YMax** = 7.

On peut donc conjecturer que la *Proposition 2* est **fausse.**

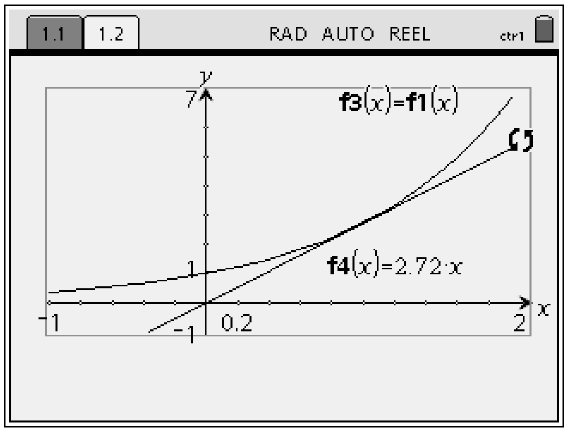
Pour le démontrer, on considère la fonction $g$ définie pour tout réel $x$ par $g(x) = e^{x} - 3x$, dérivable pour tout $x$ réel.

$g'(x) = e^{x} - 3$ d'où $g'(x) \geq 0$ pour $x \geq \ln (3)$ et $g'(x) < 0$ pour $x < \ln (3)$.
Donc $g$ admet un minimum en $x = \ln (3)$ et ce minimum vaut :$g(\ln (3)) = 3 - 3 \ln (3) \approx -0{,}296$.
Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, l'équation $g(x) = 0$ admet donc deux solutions $\alpha$ et $\beta$ et, sur l'intervalle $]\ \alpha\ ;\ \beta\ [$, $g\ (x) < 0$.

Pour émettre une conjecture concernant la *Proposition 3*, on peut se servir de la fonction définie précédemment et la modifier avec l'outil **Pointeur**.
Le pointeur doit prendre la forme ci-contre.



On peut conjecturer que la *Proposition 3* est **vraie** et que, pour $a \approx 2{,}72$, la droite $\mathcal{D}_a$ est tangente à la courbe $\mathcal{C}$.




**2)** Les études précédentes permettent de conjecturer qu'il existe un réel $a_0 \approx 2{,}72$ tel que :

- Si $0 < a < a_0$, la droite $\mathcal{D}_a$ est en dessous de la courbe $\mathcal{C}$ pour tout $x$ réel ;
- Si $a = a_0$, la droite $\mathcal{D}_a$ est en dessous de la courbe $\mathcal{C}$ sauf en un point où la droite $\mathcal{D}_a$ est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ ;
- Si $a > a_0$, la droite $\mathcal{D}_a$ coupe la courbe $\mathcal{C}$ en deux points d'abscisses $\alpha$ et $\beta$ ($\alpha < \beta$) ; de plus, la droite $\mathcal{D}_a$ est en dessous de la courbe $\mathcal{C}$ sur les intervalles $]-\infty\,;\alpha[$ et $]\beta\,;+\infty[$ et est au dessus de la courbe $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $]\alpha\,;\beta[$ ;
- Si $a = 0$, la droite $\mathcal{D}_a$ est en dessous de la courbe $\mathcal{C}$ pour tout $x$ réel ;
- Si $a < 0$, la droite $\mathcal{D}_a$ coupe la courbe $\mathcal{C}$ en un point d'abscisse $x_0$ ($x_0 < 0$) ; de plus, la droite $\mathcal{D}_a$ est au dessus de la courbe $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $]-\infty\,;x_0[$ et en dessous de la courbe $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $]x_0\,;+\infty[$.

**3)** Pour justifier la réponse conjecturée pour la *Proposition 3*, déterminons l'équation de la tangente $\Delta_c$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse $c$ :

Pour cela ouvrir une page **Calculs**, demander l'équation de $\Delta_c$ par **Menu – Analyse - Tangente** ( voir écran ci contre ) puis demander la **Résolution** pour x=0

De là, $a = \mathrm{e} \approx 2{,}72$ comme conjecturé avec le logiciel de construction graphique.