EP 013 - 2008 : Étude de flux de populations

Auteurs du corrigé : France et Michel Villiaumey **TI-Nspire™ / TI-Nspire™ CAS**

***Avertissement** : ce document a été réalisé avec la version 1.4 ; il est disponible dans sa version la plus récente sur notre site http://education.ti.com/france, menu Ressources pédagogiques.*

Fichier associé : EP013_2008_Populations.tns

1. Le sujet

Sujet 013 de l'épreuve pratique 2008 – Étude de flux de populations

Enoncé

L'objet de ce travail est l'étude de flux de populations entre trois zones géographiques : une ville notée A, une zone périphérique notée B et une zone de campagne notée C.

Pour modéliser les flux de population, on fait les hypothèses suivantes :

- La population totale des trois zones ***reste constante***.
- Chaque année la zone A perd 10% de sa population, mais accueille 10% de la population de la zone B et 1% de la zone C.
- Chaque année la zone B perd 10% de sa population, mais accueille 10% de la population de la zone A et 1% de la zone C.
- Chaque année la zone C perd 2% de sa population.

Au premier janvier 2008, la zone A comptait 5 000 habitants, la zone B en comptait 2 000 et la zone C en comptait 4 000.

On désigne par a_n, b_n et c_n les nombres d'habitants respectifs des zones A, B et C au premier janvier de l'année 2008 + n. On admettra, pour l'étude mathématique, que les nombres réels a_n, b_n et c_n peuvent ne pas être entiers.

1. On souhaite décrire, avec le modèle ci-dessus, l'évolution des trois populations.

a) Représenter graphiquement, à l'aide du tableur, ou d'une calculatrice, les suites (a_n), (b_n) et (c_n).

b) Conjecturer le sens de variation et la convergence des suites (a_n), (b_n) et (c_n).

2. Pour chaque année 2008 + n, d_n est la différence de population entre les zones A et B. Conjecturer la nature de (d_n).

3. On se propose de calculer les limites des suites (a_n), (b_n) et (c_n).

a) Déterminer l'expression de c_n et de d_n en fonction de n.

b) En déduire l'expression de a_n et de b_n en fonction de n.

c) Déterminer les limites des suites (a_n), (b_n) et (c_n).

Production demandée

- Une feuille de calculs donnant les valeurs de n et les termes des différentes suites.
- Un graphique représentant les suites (a_n), (b_n) et (c_n).
- Les réponses argumentées aux questions de la Partie 3.

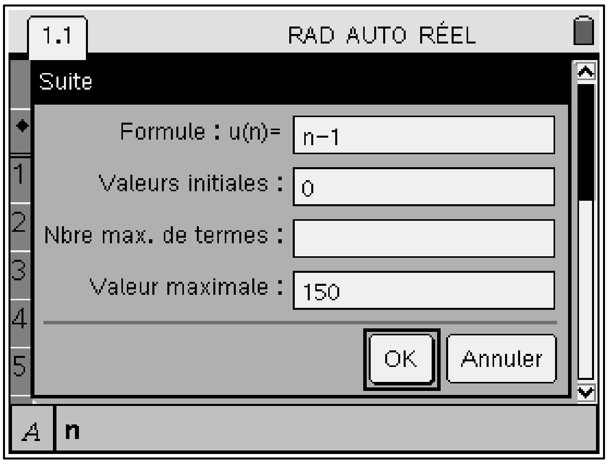
Compétences évaluées

- **Compétences TICE**
  - Savoir utiliser les fonctions de base du tableur pour obtenir les termes de plusieurs suites récurrentes ;
  - Savoir obtenir à l'aide du tableur une représentation graphique des suites.
- **Compétences mathématiques**
  - Savoir établir des relations de récurrence ;
  - Reconnaître des suites géométriques ; en étudier la convergence ;
  - Savoir utiliser des suites auxiliaires.

2. Corrigé

1) Ouvrir une page **Tableurs & listes**.

Dans la colonne **A**, générer la suite des entiers de 0 à 150 par **Menu 3 : Données 1 : Générer une suite** et remplir la boite de dialogue comme ci-contre.



Ecrire en cellule **B1** la valeur **5 000**, en cellule **C1** la valeur **2 000** et en cellule **D1** la valeur **4 000**

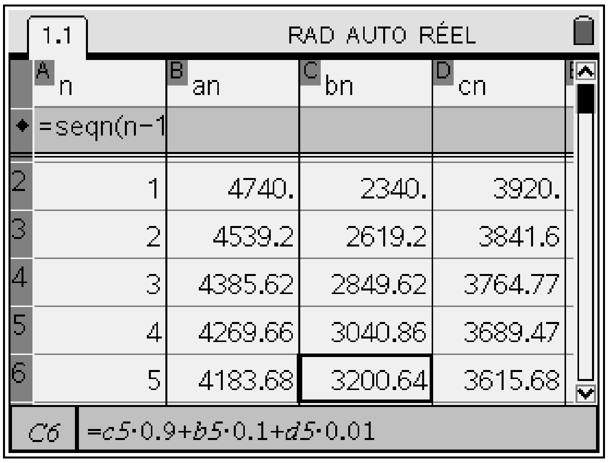
Ecrire ensuite en cellule **B2** la formule **=B1*0.9+C1*0.1+D1*0.01**

puis en cellule **C2** la formule **=C1*0.9+B1*0.1+D1*0.01**

et en cellule **D2** la formule **= D1*0.98**

Nommer respectivement **n, an, bn et cn** les 4 colonnes **A, B, C et D**.

Se positionner sur la cellule **B2** et sélectionner les cellules **B2**, **C2** et **D2** à l'aide de la touche afin de les recopier vers le bas jusqu'à la ligne 151 pour obtenir les termes consécutifs des suites (a_n), (b_n) et (c_n) pour n variant de 0 à 150.

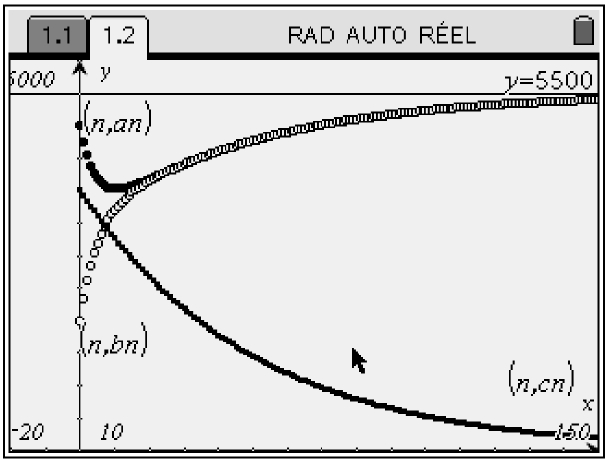


Représentation graphique des suites (a_n), (b_n) et (c_n) :

Ouvrir une nouvelle page : **ctrl I** et choisir
Graphiques et géométrie.
Menu
3 : Type de graphiques. 4 : Nuage de points.

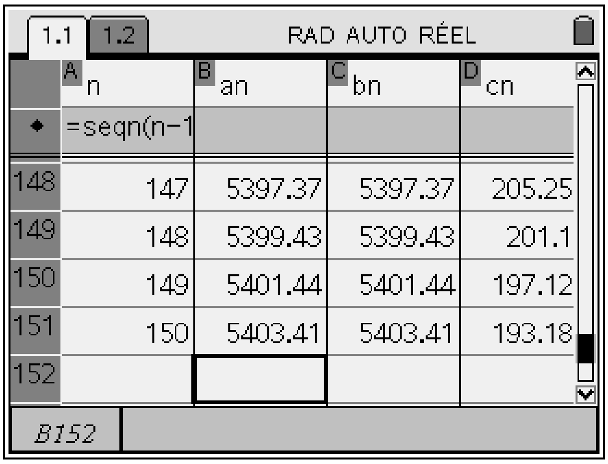
Sélectionner en **s1** les variables **n** et **an**, en **s2** les variables **n** et **bn** et en **s3** les variables **n** et **cn**.

Prendre un Zoom données (**Menu 4 : Fenêtre. 9**)
Afin de tracer la droite y = 5500, choisir **Menu**
3 : Type de graphiques.
1 : Fonction et taper $f_1(x) = 5500$



En observant les représentations graphiques obtenues et le tableur, les conjectures suivantes peuvent être faites : la suite (c_n) est décroissante, la suite (bn) est croissante mais la suite (a_n) n'est pas monotone mais croissante à partir d'un certain rang.

Les suites (a_n) et (b_n) semblent converger vers la même limite 5500, la suite (c_n) converge vers 0.

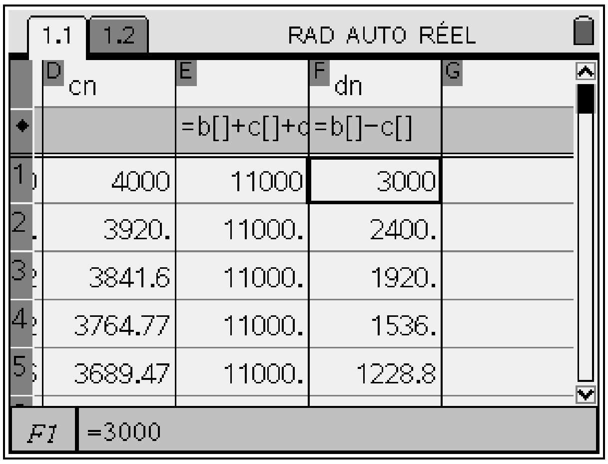


2) Revenir à la page précédente.

Vérifier que la somme des termes des trois suites reste constante et égale à 11 000 : taper dans la cellule grisée de la colonne **E** la formule **= b+c+d**

Calculer les termes de la suite (d_n) dans la colonne F taper dans la cellule grisée la formule **= b-c**

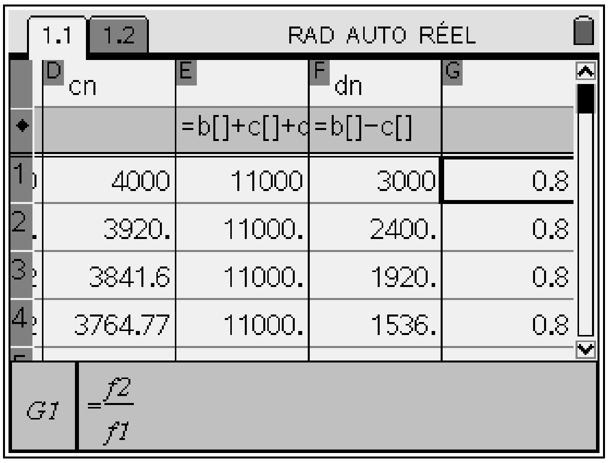
Nommer **dn** cette colonne.



Nature de la suite (d_n) :

Taper en cellule **G1** la formule **= F2÷F1**, la recopier vers le bas pour vérifier que le rapport des termes consécutifs est sensiblement constant et égal à 0,8.

On peut conjecturer que la suite (d_n) est une suite géométrique de premier terme 3 000 et de raison 0,8.



Les expressions de (c_n) et (d_n) sont les termes généraux de deux suites géométriques décroissantes qui convergent vers 0 :
$c_n = 4000 * 0.98^n$ et $d_n = a_n - b_n = 3000 * 0.8^n$.

Puisque $a_n + b_n + c_n = 11\,000$, on en déduit que $a_n = 5\,500 + 1500 * 0.8^n - 2000 * 0.98^n$,

$$b_n = a_n - d_n$$
$$= 5\,500 - 1\,500 * 0.8^n - 2\,000 * 0.98^n$$

et que les deux suites (a_n) et (b_n) convergent vers 5 500.

Tous les écrans de ce document sont obtenus à l'aide de la calculatrice.