EP 121 - 2009 : Limites d'intégrales

Auteur du corrigé : François TEXIER **TI-Nspire™ CAS**

***Avertissement** : ce document a été réalisé avec la version* 1.7

Fichier associé : EP121_2009_LimitesIntegrales_CAS.tns

1. Le sujet

Sujet 121 de l'épreuve pratique 2009 – Limites d'intégrales

Énoncé

Pour un entier naturel *n* non nul, on considère le nombre I_n défini par l'intégrale :

$$I_n = \int_0^1 \left(1+\frac{x}{n}\right)^n dx .$$

On cherche à déterminer la limite éventuelle de I_n lorsque *n* tend vers +∞.

Partie A

1. À l'aide d'un logiciel adapté, tracer la courbe représentative de la fonction

$$f_n : x \mapsto \left(1+\frac{x}{n}\right)^n .$$

2. Faire varier *n*. Quand *n* devient très grand, quelle est l'allure de la courbe représentative de f_n ?

3. Essayer alors de conjecturer une valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Partie B

4. Calculer une primitive de f_n sur [0 ; 1] et en déduire la valeur exacte de I_n.

5. Montrer que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

6. En déduire la valeur exacte de $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Production demandée

- Les représentations graphiques de la question **1.**
- La rédaction des questions **5**. et **6.**

Compétences évaluées

- Représenter graphiquement une famille de fonctions.
- Donner une estimation d'une aire à l'aide du logiciel utilisé.
- Calculer l'intégrale d'une fonction.
- Calculer une limite de suite.

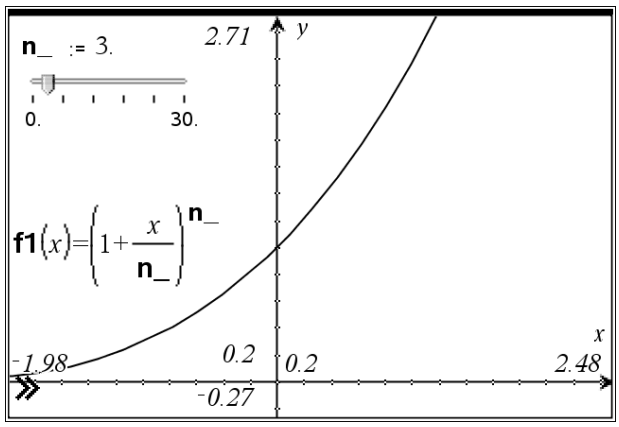
© Texas Instruments 2009 / Photocopie autorisée

2. Corrigé

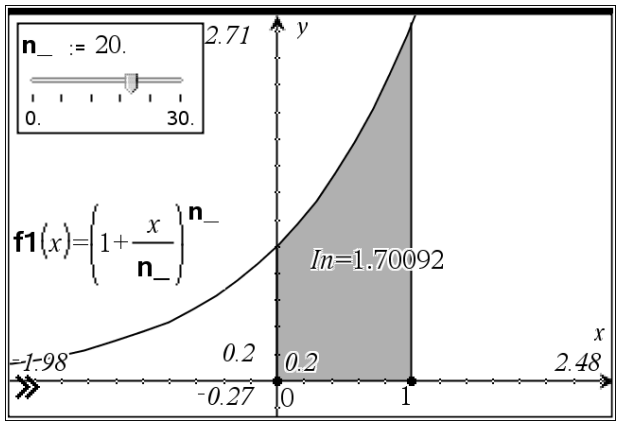
Partie A

1) Ouvrir une page **Graphiques & géométrie**.

Créer un curseur, nommer la variable « n_ » (pour éviter des perturbations avec la partie calcul formel de la **Partie B**), puis le paramétrer pour pouvoir avoir de nombreuses valeurs de *n*.
Saisir ensuite dans $f_1(x)$ l'expression de f en remplaçant « *n* » par « n_ » dans l'écriture.
Ajuster le réglage de la fenêtre comme sur l'écran ci-contre puisque on va calculer des intégrales sur [0 ; 1].



2) Calculer l'intégrale de 0 à 1 de f_1 grâce à l'outil **Mesures**, **Intégrale**.
Compléter l'affichage de la valeur par l'ajout de « I_n= ».
Faire varier, grâce au curseur, la valeur de *n* (ici de 0 à 30).
L'allure de la courbe semble se rapprocher de celle de la fonction exponentielle.



3) Il semble que la valeur de I_n se rapproche d'un réel proche de 1,7.

Complément :
On peut utiliser une page **Tableur & listes** pour obtenir la liste des valeurs exactes et approchées de I_n et constater que ces valeurs se rapprochent d'un réel proche de 1,71685 (mais l'esprit de l'épreuve n'exigeait pas d'aller jusque-là).

	A vmax	B n1	C in	D vapprox	E
◆		=seq(x	=∫(f('n1,x),x,0,1	=round(in,3	
1	n_max...	0	1	1.	
2	250	1	3/2	1.5	
3		2	19/12	1.58333	
4		3	175/108	1.62037	
5		4	2101/1280	1.64141	
6		5	31031/18750	1.65499	

B | n1:=seq(x,x,0,a2,1)

	vmax	B n1	C in	D vapprox	E
◆		=seq(x	=∫(f('n1,x),x,0,1	=round(in,3	
247		246	6272772998...	1.71683	
248		247	4220140339...	1.71683	
249		248	2850660017...	1.71684	
250		249	1933339531...	1.71684	
251		250	1316461117...	1.71685	

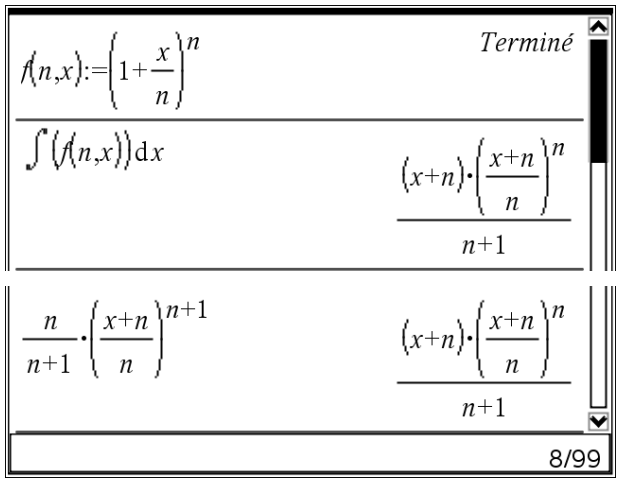
B251 | =250

© Texas Instruments 2009 / Photocopie autorisée

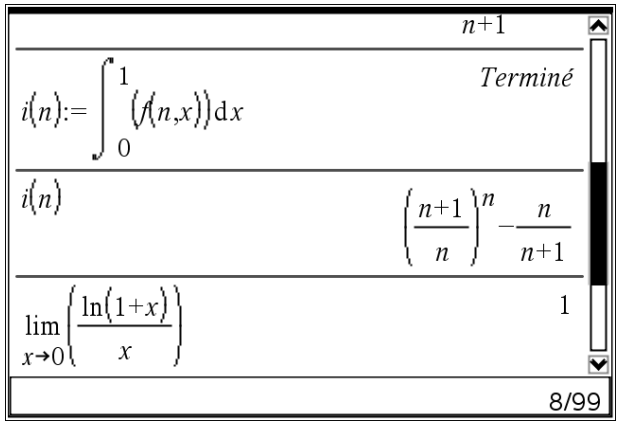
Partie B

4) Ouvrir une page **Calcul**.

Définir la fonction f sous la forme $f(n, x)$ (comme sur l'écran ci-contre).
Demander une primitive de f ; le résultat affiché peut sembler déroutant mais correspond bien à la réalité, il suffit pour le vérifier de demander la transformation du résultat attendu.



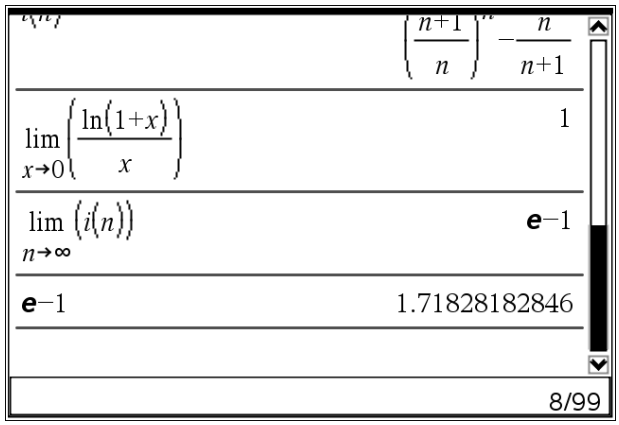
5) $\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\ln(1+x)-\ln(1)}{x}$, donc ce quotient est le taux d'accroissement de la fonction logarithme népérien entre 1 et $1 + x$; donc la limite de ce quotient est le nombre dérivé de la fonction logarithme en $x = 1$, donc $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$.



6) $I_n=\left(\frac{n+1}{n}\right)^n-\frac{n}{n+1}=\mathrm{e}^{n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}-\frac{n}{n+1}$

$$=e^{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}}-\frac{1}{1+\frac{1}{n}},$$

or $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=\mathrm{e}-1$.



Remarque : on peut vérifier, en demandant une valeur approchée de ce résultat que la conjecture faite en **Partie A** est vérifiée.

© Texas Instruments 2009 / Photocopie autorisée