ESD 2009 – 0627 : Intégration

Auteur du corrigé : Gilbert JULIA **TI-Nspire™ CAS**

***Avertissement** : ce document a été réalisé avec la version 1.7 de TI-Nspire CAS.*

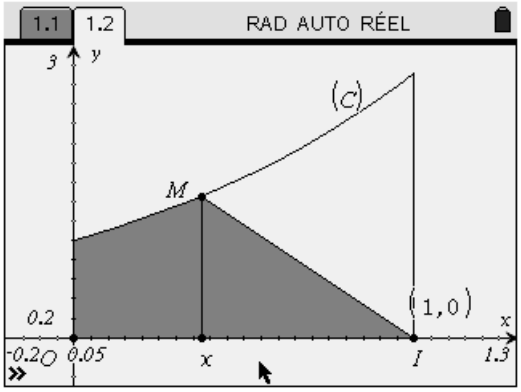
Fichier associé : esd2009_0627.tns

1. Le sujet

1. L'exercice proposé au candidat

Soit f une fonction dérivable, strictement positive et strictement croissante sur [0 ; 1] et (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal d'origine O. On note I le point de coordonnées (1 ; 0) et on note Δ la portion du plan comprise entre la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. Le but de l'exercice est de prouver l'existence d'un unique réel α appartenant à l'intervalle [0 ; 1] tel que, si A est le point de (C) d'abscisse α, le segment [IA] partage Δ en deux parties de même aire.

Pour tout réel x appartenant à l'intervalle [0 ; 1], on note M le point de coordonnées (x ; $f(x)$).
On désigne par g la fonction qui à tout réel x appartenant à $[0 ; 1]$ associe l'aire du domaine limité par la droite (IM), l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la courbe (C).



1. Pour tout x appartenant à l'intervalle [0 ; 1], exprimer $g(x)$ en fonction de x.

2. Étudier les variations de la fonction g sur [0 ; 1].

3. 1. Par des considérations d'aires, montrer que $g(0) < \frac{1}{2}\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

3. 2. Démontrer qu'il existe un unique réel α appartenant à [0 ; 1] tel que $g(\alpha)$ soit égal à la moitié de l'aire de Δ.

2. Le travail demandé au candidat

Le candidat rédigera sur ses fiches :

- Sa réponse à la question **3** de l'exercice.
- Un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Intégration** ».

Le candidat présentera au jury :

- Le contenu de ses fiches.
- Les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice.

2. Eléments de correction

L'exercice proposé est un exercice de réinvestissement portant d'une part sur la notion de fonction définie par une intégrale (questions **1** et **2**) et d'autre part sur le théorème des valeurs intermédiaires (question **3**). Il peut être posé dans une classe de terminale scientifique.

Méthodes et savoirs mis en jeu dans l'exercice

Savoirs

- Connaître le lien entre une intégrale et l'aire sous la courbe d'une fonction continue et positive (question **1**).

© Texas Instruments 2009 / Photocopie autorisée

- Connaître la propriété d'additivité des aires. L'expression $g(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+\frac{1}{2}(1-x)f(x)$ semble en effet la plus naturelle pour exprimer l'aire du domaine grisé, en considérant ce dernier comme réunion d'un domaine sous la courbe et d'un triangle.
- Savoir dériver une fonction définie par une intégrale et pour cela savoir que, *f* étant une fonction continue sur un intervalle *I* et *a* appartenant à *I*, la fonction définie sur *I* par : $x\mapsto\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de la fonction *f* sur l'intervalle *I* (question **2**).
- Connaître l'inégalité de la moyenne (qui fournira l'inégalité $f(0)\le\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\le f(1)$ utile mais non décisive dans la question **3. 1**).
- Connaître le théorème des valeurs intermédiaires (question **3. 2**) et savoir en vérifier ses hypothèses.

Méthodes

- Étudier les variations de *g* sur [0 ; 1] en exploitant le signe de sa dérivée.
- Interpréter des aires en termes d'intégrales et comparer géométriquement ces aires pour obtenir des inégalités.
- Lorsque *h* est une fonction continue et strictement croissante sur un intervalle [*a* ; *b*], on peut mettre en évidence l'existence d'une unique solution dans [*a* ; *b*] de l'équation *h*(*x*) = 0 si on prouve que *h*(*a*) et *h*(*b*) sont de signes contraires.

3. Apport de la TI-Nspire

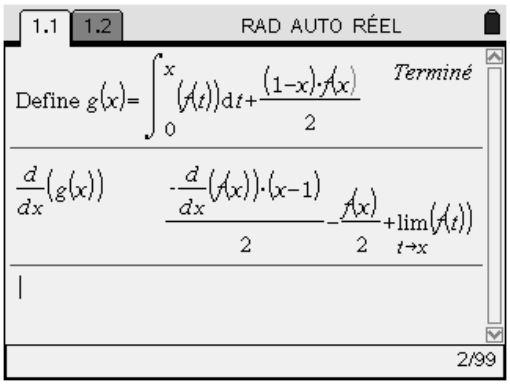
a. Apports proposés

- Résolution assistée par le module de calcul formel
- Illustration de l'exercice à l'aide de quelques exemples.

b. Résolution à l'aide du calcul formel

Ouvrir une page **Calculs**. Définir la fonction g :

$g(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+\frac{1}{2}(1-x)f(x)$ et la dériver.



Question **2.** L'expression fournie par le logiciel attire l'attention sur le rôle important de l'hypothèse de continuité de *f* sur [0 ; 1] : cette hypothèse justifie que $\lim_{t\to x} f(t)=f(x)$, il s'agit là de la dérivée de la fonction $x\mapsto\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

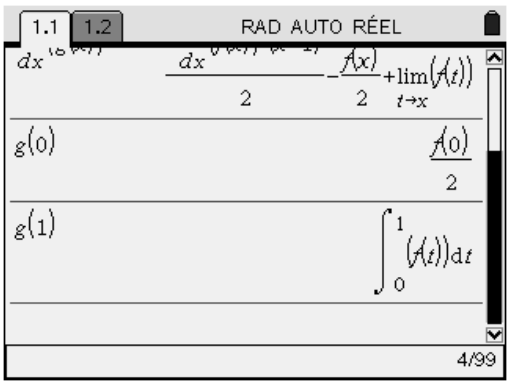
L'expression attendue est : $g'(x)=\frac{1}{2}\left(f(x)+(1-x)f'(x)\right)$.

Pour tout réel *x* de l'intervalle [0 ; 1], $g'(x)$ est la demi somme d'un terme strictement positif sur [0 ; 1] et d'un autre positif sur [0 ; 1]. La fonction *g'* est strictement positive sur [0 ; 1]. La croissante stricte de *g* sur [0 ; 1] en résulte.

© Texas Instruments 2009 / Photocopie autorisée

Question **3**. Calculer les valeurs de *g* en 0 et en 1.

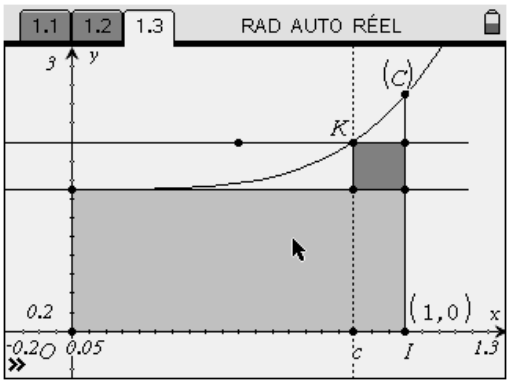
L'énoncé attend une justification géométrique[1] de l'inégalité stricte $g(0) < \frac{1}{2}\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$, par exemple :



Le nombre $\frac{f(0)+f(1)}{2}$ est valeur intermédiaire pour *f*.

Il existe *c* appartenant à l'intervalle ouvert]0 ; 1[tel que : $f(c) = \frac{f(0)+f(1)}{2}$.

La courbe représentative de *f* passe par le point *K* de coordonnées $\left(c\ ;\ \frac{f(0)+f(1)}{2}\right)$. Le domaine sous la courbe contient le rectangle de format $1 \times f(0)$ surmonté d'un rectangle de format $(1-c)\times\frac{f(1)-f(0)}{2}$.



L'aire sous la courbe est supérieure ou égale à la somme des aires des deux rectangles : elle est donc strictement supérieure à l'aire du rectangle de format $1 \times f(0)$.

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \geq f(0) + (1-c)\frac{f(1)-f(0)}{2} > f(0).$$

Pour mémoire et en marge de l'étude de l'exercice proprement dite, nous en donnons ci contre une illustration.

Si on pose : $h(x) = g(x) - \frac{1}{2}\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$, *g* est égale à la moitié de l'aire de Δ si et seulement si *h* prend la valeur 0. Or, *h* étant strictement croissante et continue sur [0 ; 1] et vérifiant : $h(0) < 0 < h(1)$, l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle ouvert]0 ; 1[.

Dans la question **3. 1**, la justification plus commode d'une inégalité large : $h(0) \leq 0 \leq h(1)$ (par l'inégalité de la moyenne) serait suffisante, puisque la question **3. 2** demande de situer α dans l'intervalle fermé [0 ; 1].

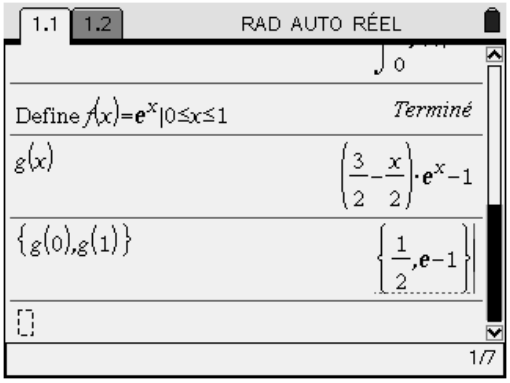
Le texte de l'énoncé mériterait d'être modifié en ce sens.

[1] La fonction $t \mapsto f(t) - f(0)$ est *continue*, *positive*, et *non identiquement nulle* sur [0 ; 1] puisque $f(1) - f(0) > 0$ en vertu de l'hypothèse de croissance stricte de *f*. Son intégrale $\int_0^1 (f(t) - f(0))\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t - f(0)$ sur le segment [0 ; 1] est par conséquent *strictement positive*. Le théorème sous-jacent n'est pas au programme des classes de terminale.

© Texas Instruments 2009 / Photocopie autorisée

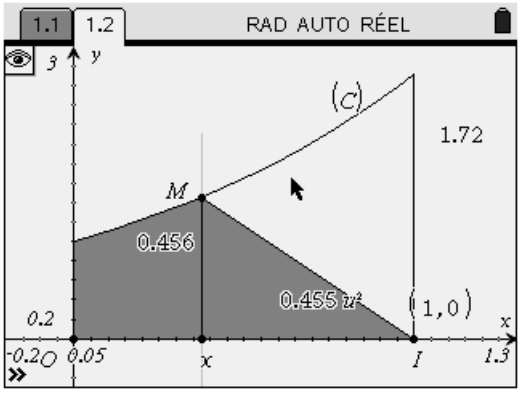
Avant de quitter la page **Calculs** et en vue de l'illustration graphique suivante, définir explicitement une fonction f satisfaisant les hypothèses de l'énoncé. La fonction exponentielle est un tel exemple. C'est cette fonction f que nous avons choisie pour l'illustration graphique de l'exercice.

Pour information, on peut dans ce cas faire afficher explicitement l'expression de la fonction g et ses valeurs en 0 et en 1.



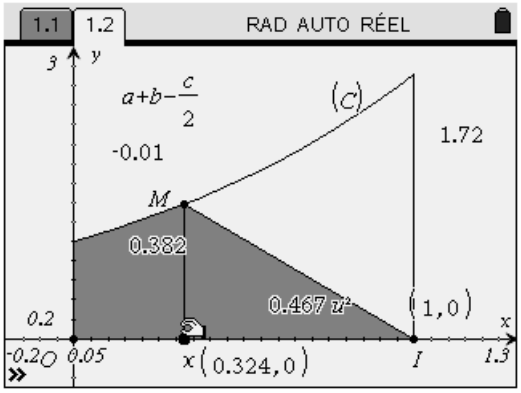
b. Illustration graphique et étude d'un exemple

Ouvrir une page **Graphiques & géométrie**. Représenter graphiquement la fonction $f_1(x) = f(x)$. Créer le point d'intersection O des axes de coordonnées ainsi que le point I de coordonnées (1 ; 0). Calculer l'intégrale $\int_0^1 f(t)\,dt$ (nombre 1,72 lorsque f est la fonction exponentielle et le réglage d'affichage des chiffres est Flottant 3). Créer le segment [OI] et un point noté x sur ce segment. Construire la perpendiculaire en x à l'axe des abscisses et noter M son point d'intersection avec le Graphique f1. Créer le triangle IxM (remplissage gris). Calculer (remplissage gris) l'aire sous la courbe du Graphique f1, limitée par le graphique, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et le segment [xM] (menu 7 5 puis cliquer successivement sur le Graphique f1, le point O et le point x). Calculer l'aire du triangle IxM. On obtient la figure de l'énoncé avec quelques informations complémentaires.



Calculer de préférence l'aire grisée diminuée de la moitié de l'aire de Δ. Le résultat représente le nombre $g(x) - \frac{1}{2}\int_0^1 f(t)\,dt$. À cet effet, créer le texte $a + b - \frac{c}{2}$ puis le calculer en sélectionnant pour a, b, c respectivement l'aire sous la courbe, l'aire du triangle, et l'intégrale $\int_0^1 f(t)\,dt$.

En déplaçant le point x, on peut surveiller l'évolution du résultat de ce calcul (-0,01 ci-contre). Tant que le résultat est négatif, l'aire grisée est plus petite que la moitié de l'aire de Δ, le réel x est plus petit que α. Lorsque le résultat est positif, l'aire grisée est plus grande que la moitié de l'aire de Δ, le réel x est plus grand que α.

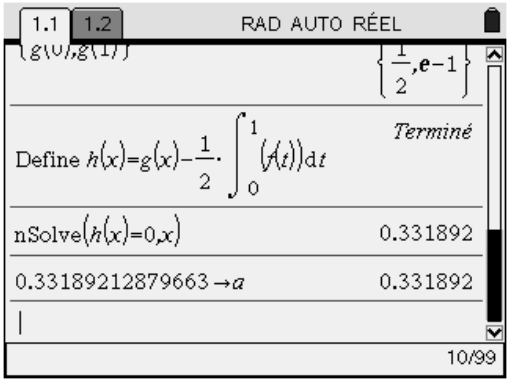


Noter, sur les deux écrans précédents, une particularité du logiciel : l'intégrale, qui est un nombre, est affichée sans unité tandis que l'aire du triangle est affichée accompagnée de l'unité d'aire u^2. C'est l'interprétation géométrique de l'intégrale en tant que mesure de l'aire sous la courbe qui donne un sens aux nombres affichés (0,456 puis 0,382).

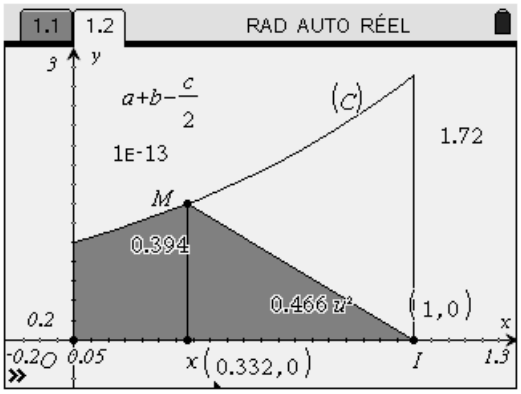
© Texas Instruments 2009 / Photocopie autorisée

Revenir à la page **Calculs**. Définir la fonction h : $h(x) = g(x) - \frac{1}{2}\int_0^1 f(t)\,dt$, déjà évoquée ci-dessus.

La résolution numérique de l'équation $h(x) = 0$ fournit une valeur approchée de la valeur α recherchée. Stocker cette valeur en variable **a**.



Remplacer dans la page **Graphiques & géométrie** l'abscisse du point x par la valeur **a**.

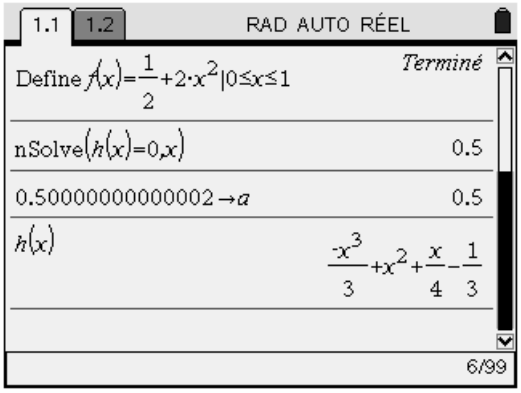


c. Actualisation pour un autre exemple de fonction *f*.

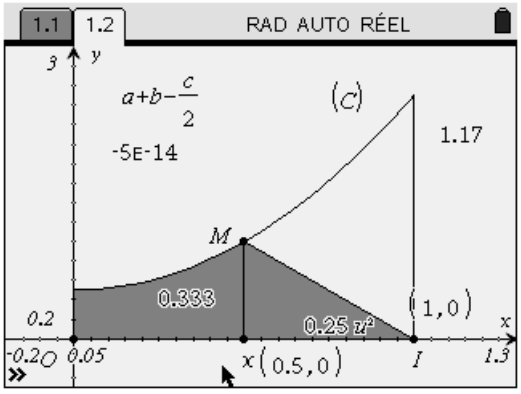
Soit maintenant la fonction définie par : $f(x) = \frac{1}{2} + 2x^2$.

Définir cette nouvelle fonction f dans la page **Calculs**. La résolution numérique de l'équation $h(x) = 0$ fournit dans ce cas $\alpha = 0{,}5$, à une erreur d'arrondi près que l'on constate en stockant dans la variable **a** la valeur trouvée.

Pour cette fonction, le logiciel affiche une expression explicite de $h(x)$. Il s'agit d'une fonction polynôme du troisième degré dont $\frac{1}{2}$ est effectivement l'unique zéro situé dans l'intervalle [0 ; 1].



Actualiser la page **Graphiques & géométrie**.



© Texas Instruments 2009 / Photocopie autorisée

4. Conclusion

Dans l'hypothèse où cet exercice est l'objet d'une séance de travaux dirigés dans une classe de terminale scientifique, l'usage de la calculatrice peut intervenir à divers moments de l'exercice :

- En début d'exercice, une illustration graphique au rétroprojecteur (sans préciser la fonction *f* choisie) favorise la compréhension de la question que l'on se propose de résoudre. Cette illustration a pour objectif de susciter des conjectures à propos de la variation de la fonction *g*.
- Un usage du module de calcul formel intervient plutôt en fin d'exercice, en phase de synthèse, pour valider (ou non) les résultats obtenus, à moins que certains élèves n'y aient recours plus tôt de leur propre initiative. On pourra notamment faire expliquer pourquoi la calculatrice affiche le résultat « inattendu » $\lim\limits_{t\to x} f(t)$ dans l'expression de la dérivée de *g* et faire expliciter l'hypothèse de l'énoncé qui permet de préciser cette limite.
- L'étude d'un exemple simple (fonction *f* à choisir) contextualise la situation étudiée après la preuve de l'existence de α dans le cas général. Le cas de la fonction exponentielle conduit à une résolution numérique approchée de l'équation $g(x)-\frac{1}{2}\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=0$, résolution dont la calculatrice se chargera. Le cas de la fonction définie par $f(x)=\frac{1}{2}+2x^2$ conduit à la mise en évidence d'une « solution remarquable » que les élèves peuvent retrouver algébriquement, cette fois sans l'aide de leur calculatrice.

Sur ce sujet, le jury n'attendait pas expressément des candidats une utilisation de calculatrice. En situation de passage d'oral, un candidat au CAPES peut cependant appuyer sa résolution de la question **3** soit par une illustration graphique, soit par un usage à bon escient du module de calcul formel, de manière à mettre en valeur ses compétences en communication.

© Texas Instruments 2009 / Photocopie autorisée