EP 126 - 2009 : Deux suites et un ensemble de points

Auteur du corrigé : François TEXIER **TI-Nspire™ CAS**

***Avertissement** : ce document a été réalisé avec la version* 1.7

Fichier associé : EP126_2009_SuitesEnsemblePoints_CAS.tns

1. Le sujet

Sujet 126 de l'épreuve pratique 2009 – Un ensemble de points construit à l'aide de deux suites

Énoncé

On construit deux suites (x_n) et (y_n) de la manière suivante :
Initialisation : $x_0 = 10$, $y_0 = 0$

Récurrence : pour tout entier naturel n, $\begin{cases} x_{n+1} = x_n - (2-\sqrt{3})y_n \\ y_{n+1} = (2-\sqrt{3})x_n + y_n \end{cases}$.

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère le point M_n de coordonnées $(x_n ; y_n)$.
L'objectif est d'observer et d'étudier le nuage des points M_n obtenus, à l'aide d'un logiciel adapté.

Partie A

1. Placer dans un repère orthonormal adapté les points M_k pour k compris entre 0 et 30.
2. Une transformation du plan envoie M_0 surM_1, M_1 sur M_2 et en général M_k sur M_{k+1}. Formuler une conjecture relative à la nature de cette transformation. En admettant que cette conjecture est vérifiée, essayer de préciser **au moins deux** des caractéristiques de cette transformation à partir de la figure affichée.

Partie B

3. On note z_n l'affixe du point M_n.
En établissant une relation entre z_{n+1} et z_n de la forme $z_{n+1} = a.z_n$, démontrer les conjectures précédentes.
On pourra chercher le module et l'argument de a^2.

Production demandée

- Réalisation de la figure demandée à l'aide du logiciel.
- Démonstration des conjectures relatives à la transformation.

Compétences évaluées

- Représenter des points, donnés par leur coordonnées, à l'aide d'un logiciel de géométrie, d'un tableur ou de tout autre logiciel adapté.
- Déterminer des éléments caractéristiques d'une similitude plane directe.
- Mener des calculs algébriques sur les nombres complexes.

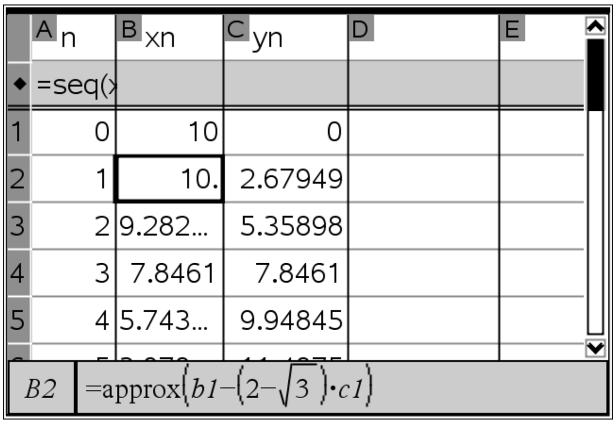
2. Corrigé

Partie A

1) Ouvrir une page **Tableur & listes**.

Nommer « n » la colonne **A**, puis, dans la cellule grisée de la colonne A, saisir la formule **=seq(x,x,0,30,1)** qui permet de créer les 31 premières valeurs de n.

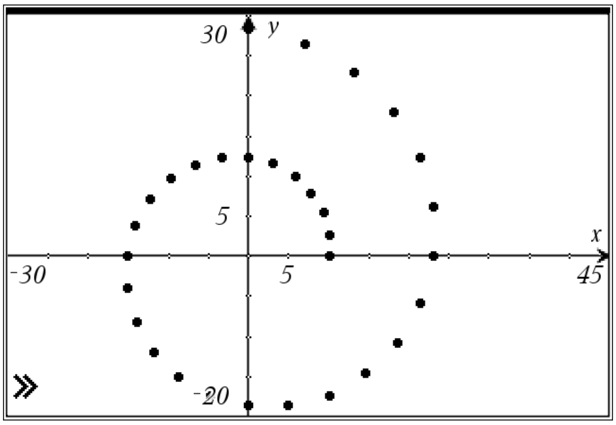
Nommer « xn » la colonne **B** et « yn » la colonne **C**, puis, en cellule **B1**, entrer 10 (valeur de x_0) et en cellule **C1**, entrer 0 (valeur de y_0) et ensuite en **B2** la formule indiquée ci-contre et valider ; faire de même en cellule **C2** en saisissant la formule **=(2 – $\sqrt{3}$)b1+c1** (ou =approx**((2 – $\sqrt{3}$)b1+c1)**) et valider.



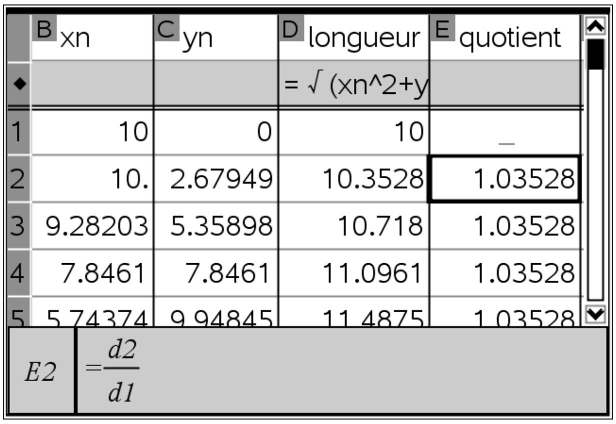
A n	B xn	C yn	D	E
=seq(x				
0	10	0		
1	10.	2.67949		
2	9.282...	5.35898		
3	7.8461	7.8461		
4	5.743...	9.94845		

B2 $=\text{approx}\left(b1-\left(2-\sqrt{3}\right)\cdot c1\right)$

Sélectionner les cellules **B2** et **C2**, puis utiliser le menu **Données**, **Saisie rapide**, sélectionner les cellules **B3** à **B32** et valider pour créer les suites (x_n) et (y_n).
Insérer une page **Graphiques & géométrie**.
Dans **Type de graphique**, sélectionner **Nuage de points**, indiquer « xn » comme valeur de x et « yn » comme valeur de y.
Demander ensuite un **Zoom données**, puis ajuster le réglage des abscisses comme ci-contre et demander un **Zoom carré**.



2) D'après le graphique précédent, il semble qu'un point soit envoyé sur le suivant par une similitude directe de centre O.
Revenir à la page **Tableur & listes**, nommer « longueur » la colonne D et, dans la cellule grisée, saisir la formule « $=\sqrt{xn^2+yn^2}$ » qui permet d'obtenir les longueurs OM_n ; puis nommer « quotient » la colonne E, et, en cellule E2, saisir la formule « =d2/d1 » et la recopier vers le bas ; on constate que ces quotients sont égaux donc cette similitude semble avoir un rapport proche de 1,03528. Il semble également que les points s'enchaînent par une rotation d'angle $\frac{\pi}{12}$.



B xn	C yn	D longueur	E quotient
		= √ (xn^2+y	
10	0	10	_
10.	2.67949	10.3528	1.03528
9.28203	5.35898	10.718	1.03528
7.8461	7.8461	11.0961	1.03528
5.74374	9.94845	11.4875	1.03528

E2 $=\frac{d2}{d1}$

Partie B

3) Pour tout n entier, $z_{n+1} = x_{n+1} + \mathrm{i}\, y_{n+1} = x_n - (2-\sqrt{3})\, y_n + \mathrm{i}\,[(2-\sqrt{3})\, x_n + y_n]$

$$= x_n + \mathrm{i}^2 (2-\sqrt{3})\, y_n + \mathrm{i}\,[(2-\sqrt{3})\, x_n + y_n] = x_n + \mathrm{i}\,(2-\sqrt{3})\, x_n + \mathrm{i}^2 (2-\sqrt{3})\, y_n + \mathrm{i}\, y_n$$
$$= x_n\,[1 + \mathrm{i}\,(2-\sqrt{3})] + \mathrm{i}\, y_n\,[1 + \mathrm{i}\,(2-\sqrt{3})] = [1 + \mathrm{i}\,(2-\sqrt{3})]\,(x_n + \mathrm{i}\, y_n)$$
$$= [1 + \mathrm{i}\,(2-\sqrt{3})]\, z_n.$$

De la relation obtenue, on peut déduire que M_{n+1} est l'image de M_n par la similitude directe de centre O, de rapport le module de a et d'angle un argument de a où $a = 1 + \mathrm{i}\,(2-\sqrt{3})$.

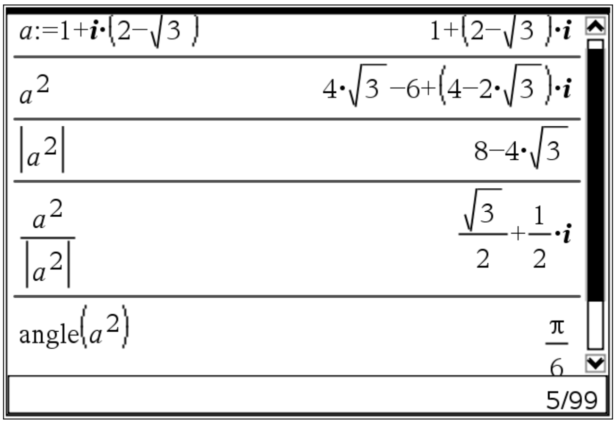
Des conjectures émises en partie **A**, il semble que l'argument de a soit $\frac{\pi}{12}$, dont les lignes trigonométriques ne sont pas simples ; il sera donc plus simple de trouver son double, soit l'argument de a^2 et d'en déduire celui de a.

Insérer une page **Calculs**.

Définir le nombre a, calculer a^2 et en déterminer le module.

En calculant le quotient $\frac{a^2}{|a^2|}$, on reconnaît dans l'écriture les cosinus et sinus de $\frac{\pi}{6}$, valeur confirmée par le calcul direct de l'argument de a^2.

Le module de a^2 est $8 - 4\sqrt{3}$, donc le module de a est $\sqrt{8-4\sqrt{3}} = \sqrt{6} - \sqrt{2} = \sqrt{2}\,(\sqrt{3} - 1)$ (il suffit de développer $(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2$ pour retrouver $8 - 4\sqrt{3}$).



L'argument de a^2 est $\frac{\pi}{6}$, donc l'argument de a est égal à la moitié de $\frac{\pi}{6}$, soit $\frac{\pi}{12}$.

Donc, pour tout entier n, M_{n+1} est l'image de M_n par la similitude directe de centre O, de rapport $\sqrt{2}\,(\sqrt{3} - 1)$ et d'angle $\frac{\pi}{12}$.

Remarque : un logiciel de calcul formel permet d'obtenir directement ces deux derniers éléments (voir écran ci-contre).