EP 128 - 2009 : Étude d'une courbe

Auteur du corrigé : François TEXIER **TI-Nspire™ CAS**

Avertissement *: ce document a été réalisé avec la version* 1.7

Fichier associé : EP128_2009_EtudeCourbe_CAS.tns

1. Le sujet

Sujet 128 de l'épreuve pratique 2009 – Étude de la courbe représentative d'une fonction

Énoncé

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 1] par $f(x) = (1 - \sqrt{x})^2$.
Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal.
On se propose d'établir une propriété de la courbe $\mathcal{C}$.

1.

a) Représenter la courbe $\mathcal{C}$ à l'aide d'un outil de géométrie dynamique.

b) Tracer la courbe représentative de la fonction g définie sur [0 ; 1] par $g = f \circ f$ puis conjecturer une expression simple de $g(x)$, pour tout x appartenant à [0 ; 1].

2.

a) Placer un point M sur la courbe $\mathcal{C}$, puis construire le point M_0 symétrique de M par rapport à la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$.

b) Quel semble être le lieu du point M_0 lorsque M décrit la courbe $\mathcal{C}$?

c) Quelle propriété de la courbe $\mathcal{C}$ peut-on alors conjecturer ?

3.

a) Pour tout réel x appartenant à l'intervalle [0 ; 1], exprimer $f \circ f(x)$ en fonction de x.

b) En déduire la propriété de la courbe $\mathcal{C}$ observée à la question **2.c)**.

Production demandée

- Réalisation du graphique et construction pour observation du lieu du point M_0.
- Démarche de démonstration pour les questions **3.a** et **3.b**.

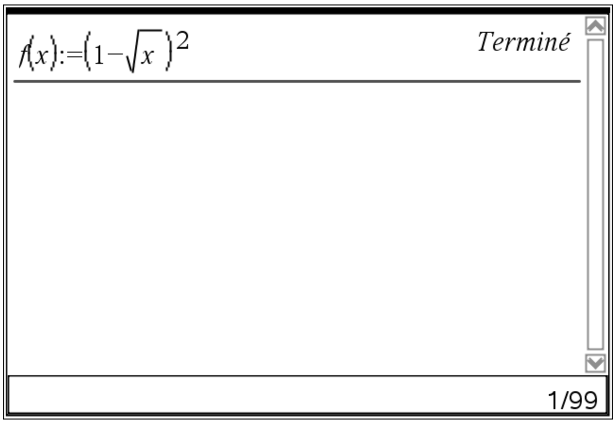
Compétences évaluées

- Représenter graphiquement une fonction à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
- Construire un lieu géométrique.
- Savoir déterminer l'expression d'une fonction composée.
- Reconnaître une bijection réciproque.

2. Corrigé

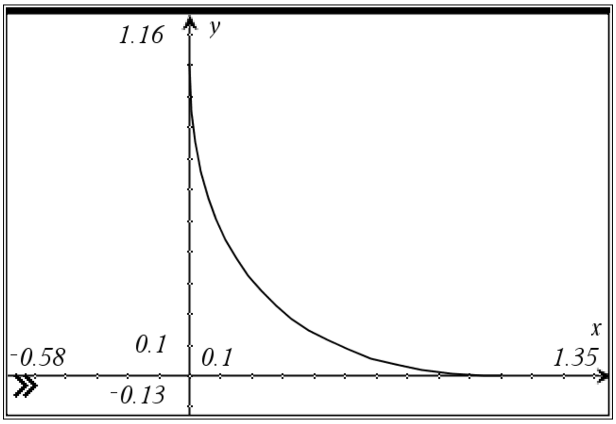
1) Ouvrir une page **Calculs**.

Définir la fonction f comme ci-contre.



a) Insérer une page **Graphiques & géométrie**.

Saisir $f_1(x)$ = when($0\leq x\leq 1$,$f(x)$,undef) et valider.
Repositionner les axes et agrandir les unités pour obtenir un graphique analogue à la copie d'écran ci-contre.



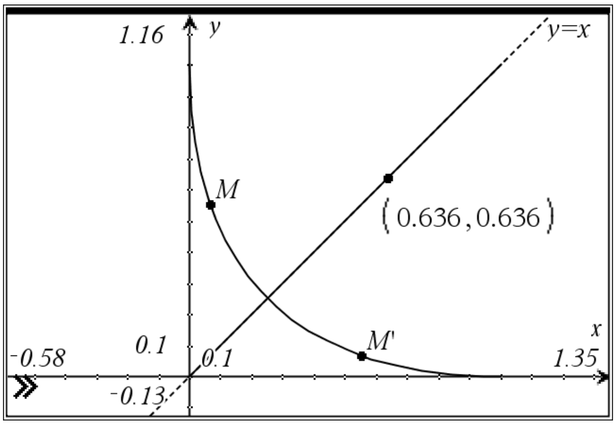
b) Saisir $f_2(x)$ = when($0\leq x\leq 1$,$f(f(x))$,undef) et valider.
Placer un point sur la courbe obtenue, demander l'affichage de ses coordonnées et le déplacer sur la courbe.

On constate que ce point a deux coordonnées identiques, une expression simple de g semble donc être $g(x) = x$.

2) a) Placer les points d'abscisses (0 ; 0) et (1 ; 1) et tracer la droite passant par ces deux points (c'est la droite d'équation $y = x$), puis la cacher.
Placer un point M sur la courbe $\mathcal{C}$ et tracer son symétrique par la réflexion d'axe $y = x$.

b) Déplacer le point M sur $\mathcal{C}$; il semble que M' parcourt $\mathcal{C}$ lorsque M décrit $\mathcal{C}$.

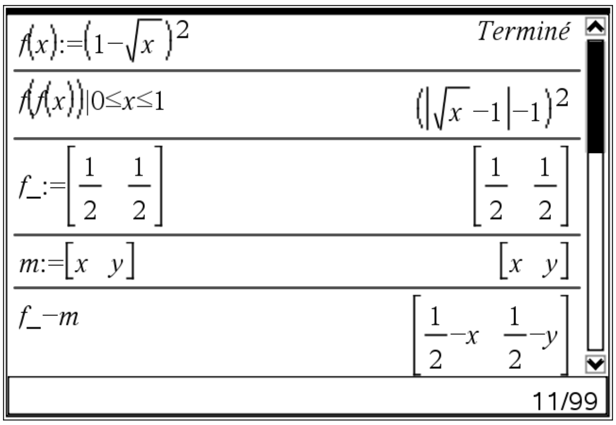
c) La courbe $\mathcal{C}$ semble donc symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$.



3) a) Pour tout $x \in [0\ ;\ 1]$,

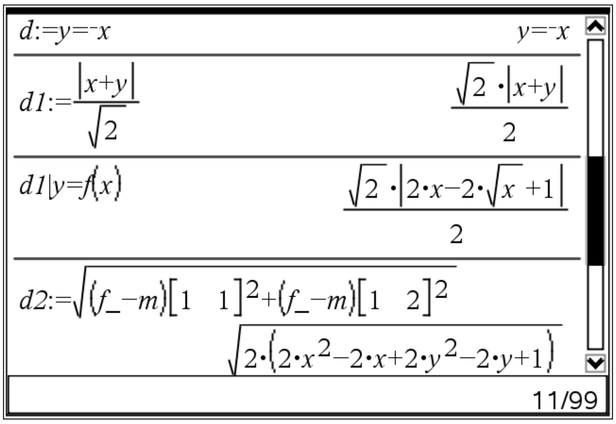
$$f\circ f(x) = f((1-\sqrt{x})^2)$$
$$= \left(1-\sqrt{(1-\sqrt{x})^2}\right)^2$$
$$= (1-(1-\sqrt{x}))^2 \text{ car } x \in [0\ ;\ 1] \text{, donc } \sqrt{x} \in [0\ ;\ 1],$$
$$= \left(\sqrt{x}\right)^2 = x.$$

b) De l'égalité précédente, on déduit que $f\circ f$ est l'application identique, autrement dit que f est sa propre réciproque, donc que sa courbe est symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Complément

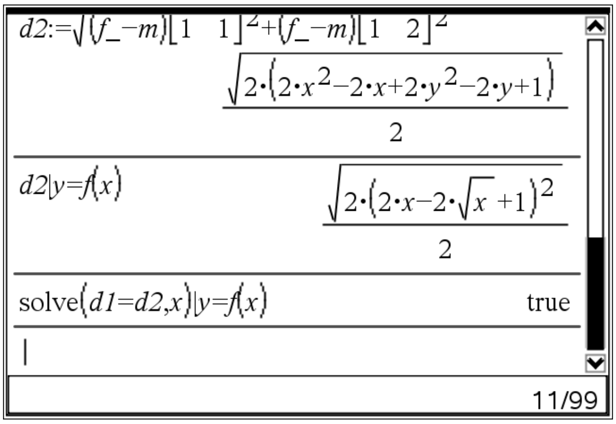
Soit d la droite d'équation $y = -x$, F le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$ et M(x ; y) un point de la courbe $\mathcal{C}$.



La distance de M à la droite d est donnée par :
$d_1 = \dfrac{|x+y|}{\sqrt{2}}$.

La distance de M à F est égale à $\|\overrightarrow{\mathrm{MF}}\|$.

Ces deux distances sont-elles égales pour un point M quelconque de la courbe $\mathcal{C}$?
D'après l'écran ci-contre, la réponse est oui.



La courbe $\mathcal{C}$ est donc contenue dans l'ensemble des points M équidistants de F et d.

La courbe $\mathcal{C}$ est incluse dans la parabole de foyer F et de directrice d.