ESD 2009 – 0712 : Problèmes sur les configurations

Auteur du corrigé : Gilbert JULIA **TI-Nspire™ CAS**

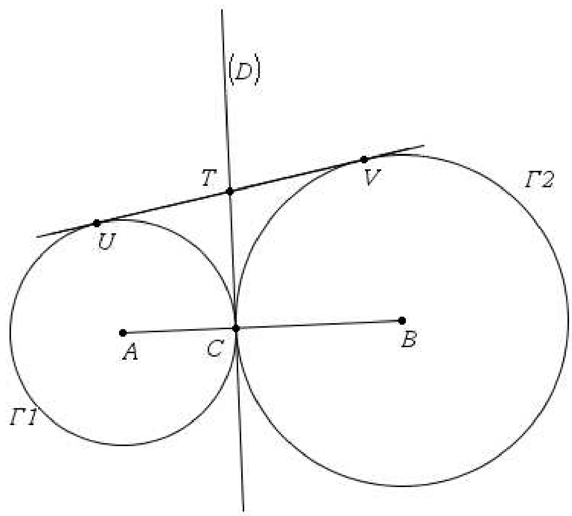
Avertissement *: ce document a été réalisé avec la version 1.7 de TI-Nspire CAS.*

Fichier associé : esd2009_0712.tns

1. Le sujet

1. L'exercice proposé au candidat

On considère deux cercles Γ_1 et Γ_2 de centres respectifs A et B et tangents extérieurement en C. La droite (D) est la tangente commune à Γ_1 et Γ_2 en C et la droite (D') est tangente à Γ_1 en U ($U \neq C$) et à Γ_2 en V. Les deux droites (D) et (D') se coupent en T.



1. Montrer que le triangle UCV est rectangle en C.

2. Montrer que le triangle ATB est rectangle en T.

3. On donne deux cercles tangents extérieurement en un point C. En vous aidant des questions précédentes, donner une construction à la règle et au compas d'une droite tangente à ces deux cercles et ne passant pas par le point C.

2. Le travail demandé au candidat

Le candidat rédigera sur ses fiches :

- Sa réponse à la question **3**.
- Un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Problèmes sur les configurations** » dont un au moins utilisera le module de géométrie dynamique de la calculatrice.

Le candidat présentera au jury :

- Le contenu de ses fiches.
- Les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice.

2. Eléments de correction

L'exercice proposé se compose de deux parties. La première partie, regroupant les questions **1** et **2**, vise à étudier les propriétés de la configuration constituée de deux cercles tangents extérieurement et de leurs tangentes communes. Une figure de travail est fournie par l'énoncé. Cette partie de l'exercice est injonctive (« montrer que … »), deux propriétés nommément désignées sont à démontrer. Il s'agit jusque là d'un « problème sur les configurations ».

La deuxième partie, constituée de la question **3**, vise à résoudre un problème de construction. L'objectif est de faire construire aux élèves eux-mêmes la figure sur laquelle ils ont raisonné. Cette partie rejoint l'un des objectifs des programmes de collège : « *entretenir la pratique des constructions géométriques (aux instruments et à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique) et des raisonnements sous-jacents qu'elles mobilisent* ».

Méthodes et savoirs mis en jeu dans l'exercice :

Savoirs

- Connaître des caractérisations du triangle rectangle, en particulier par son inscription dans un demi-cercle (question **1**).
- Selon la démarche utilisée, connaître la caractérisation des points de la bissectrice d'un angle par la propriété d'équidistance aux deux côtés de l'angle (question **2**).

Méthodes

Dans les deux premières questions, les élèves doivent repérer des propriétés susceptibles de produire le résultat à démontrer (« quelle propriété permet de prouver que tel triangle est un triangle rectangle ? »). Cette démarche est connue sous le nom de « analyse remontante ». Dans la deuxième question, plusieurs démarches peuvent d'ailleurs aboutir : chercher à évaluer l'angle $\widehat{ATB}$, à montrer que les droites (TA) et (TB) sont perpendiculaires à (CU) et à (CV) respectivement, …

Dans la troisième question, une *synthèse* est attendue : comment reconstituer la figure en exploitant les propriétés qui viennent d'être prouvées. Les élèves doivent déterminer une chronologie dans la construction : d'abord on obtient le point T, ensuite seulement les points U et V.

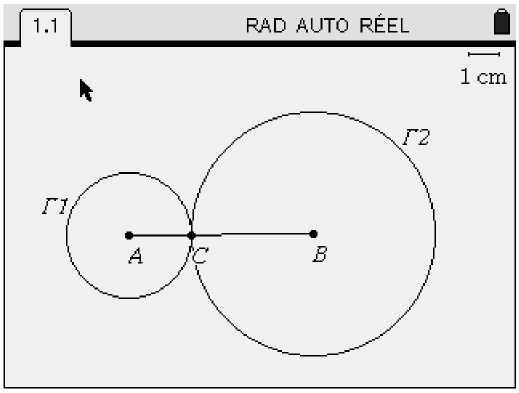
3. Apport de la TI-Nspire

a. Apports proposés

- Construction illustrant la question **3** de l'exercice (attendue par le jury).
- Activité permettant de poser autrement le problème et d'augmenter la part d'initiative des élèves.

b. Construction de la figure de la question 3 « à la règle et au compas »

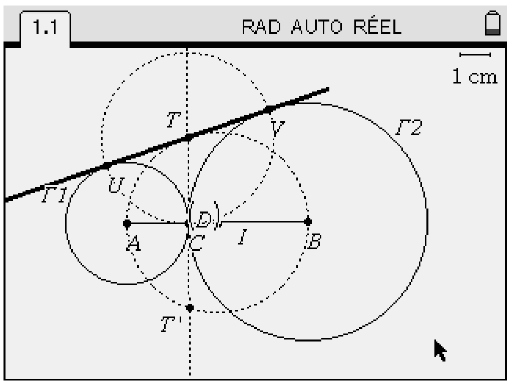
Ouvrir un nouveau classeur et une page **Graphiques & géométrie**. Choisir **Afficher le plan géométrique** (menu 2 2). Créer un segment [AB] et un point C sur ce segment. Créer les cercles Γ_1 et Γ_2 de centres respectifs A et B passant par C.



Construire[1] la perpendiculaire (D) à [AB] en C. Construire le cercle de diamètre [AB]. Il coupe (D) en deux points distincts T et T'. Le cercle de centre T passant par C recoupe Γ_1 en U et Γ_2 en V. La droite (UV) est une tangente commune aux deux cercles Γ_1 et Γ_2 autre que (D).

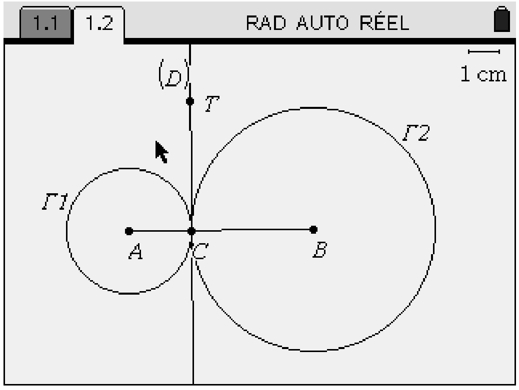
A l'aide des **Attributs** d'un objet (menu 1 4), on peut distinguer les constructions intermédiaires (en pointillés) et les objets à construire (épaisseur moyenne).

En vertu de la propriété de symétrie d'un cercle par rapport à tout diamètre, il existe une autre tangente commune à Γ_1 et à Γ_2, passant par T' et symétrique de (UV) par rapport à la droite (AB), diamètre commun à Γ_1 et à Γ_2.



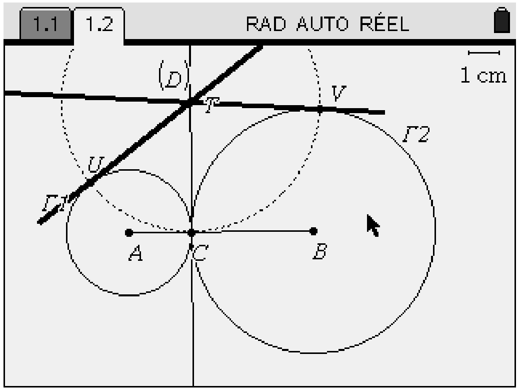
[1] À ce moment et en prévision de l'activité suivante « une autre façon … », on peut sélectionner l'application (ctrl K ou bien ctrl ⌂ 5 3) puis effectuer un copié-collé (ctrl C, ctrl V) dans une nouvelle page qui sera utilisée ultérieurement.

c. Une autre façon d'aborder le problème de construction



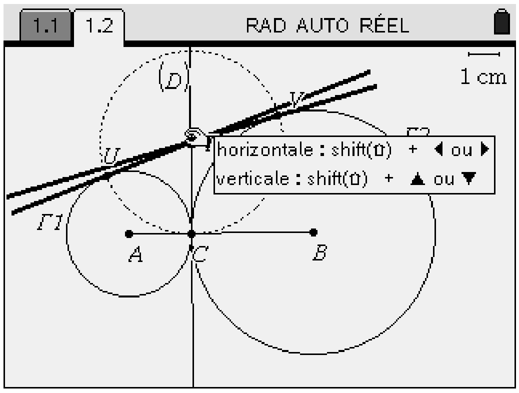
Ouvrir une nouvelle page **Graphiques & géométrie** et reconstruire la configuration formée uniquement de deux cercles tangents et de leur perpendiculaire commune (*D*).

On considère un point *T* sur la droite (*D*), distinct du point *C*. On va s'intéresser aux tangentes aux cercles Γ_1 et Γ_2 : « Outre la droite (*TC*), il existe une autre droite issue de *T* qui est tangente à Γ_1 en un point *U* distinct de *C*. De même, il existe une autre droite issue de *T* tangente à Γ_2 en un point *V* distinct de *C*. Comment construire ces droites ? »



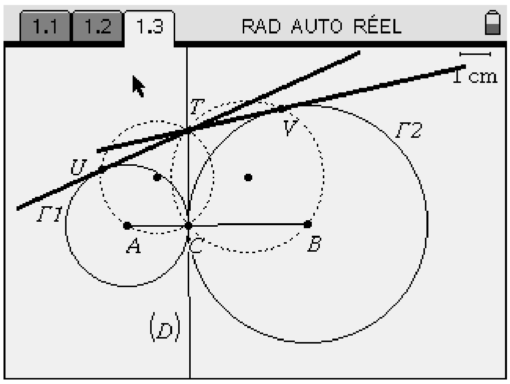
Pour répondre à cette première question, les élèves peuvent mobiliser les propriétés des tangentes à un cercle issues d'un point extérieur au cercle :

TU = *TV* = *TC*. Le cercle de centre *T* et passant par *C* recoupe Γ_1 en *U* et Γ_2 en *V*.



En déplaçant le point *T* sur la droite (*D*), on conjecture qu'il existe deux positions de *T* pour lesquelles les tangentes issues de *T* à Γ_1 et Γ_2 sont confondues. « Où choisir exactement le point *T* sur la droite (*D*) pour cela ? ».

Les élèves sont amenés à s'interroger sur les propriétés particulières que doit avoir le point *T* pour répondre à la question. Cette procédure amène plutôt à s'intéresser aux propriétés du triangle *UCV*.



Aussi bien, il est possible de construire *U* et *V* en tant que points d'intersection autres que *C* du cercle de diamètre [*AT*] avec Γ_1 et du cercle de diamètre [*BT*] avec Γ_2 car les triangles *AUT* et *BVT* sont rectangles en *U* en en *V* respectivement.

Dans cette procédure, s'interroger sur le cas où (*TU*) et (*TV*) sont confondues amène plutôt à s'intéresser aux propriétés du triangle *ATB*.

L'énoncé de l'exercice proposé a maintenant pour objectif de faire démontrer les propriétés conjecturées puis de faire rédiger et réaliser un programme de construction d'une tangente commune aux deux cercles.

4. Conclusion

Tel que le sujet est posé, parmi les « méthodes et savoirs mis en jeu », le jury est en droit d'attendre du candidat l'exposé d'une méthode de résolution d'un problème de construction[2].

Dans une première phase, on effectue une analyse du problème. C'est le rôle des deux premières questions. Ici, la figure est fournie et les propriétés à dégager sont données dans l'énoncé. Dans d'autres circonstances, les élèves devront faire eux-mêmes une figure d'analyse « à main levée » (en l'occurrence, il est facile avec une règle de tracer empiriquement une droite « à peu près » tangente aux deux cercles). Ils devront ensuite faire l'inventaire des propriétés de la configuration.

Dans une deuxième phase, de synthèse maintenant, on exploite les propriétés relevées (ou seulement certaines d'entre elles) pour effectuer une construction précise de l'objet à construire. C'est le moment de discuter l'existence et le nombre de tels objets.

L'usage d'un logiciel de géométrie peut aider la prise de conscience de ces deux phases. La figure d'analyse est obtenue « à la souris », c'est une figure approximative qui ne présente aucune résistance à la déformation. Au contraire, la figure de synthèse fournit les positions exactes des points T, U, V. Elle est obtenue à l'aide du menu « Constructions » du logiciel et résiste à toute action sur les objets initiaux.

Dans l'approche que nous proposons, le cas de tangente commune apparaît comme liée à une particularité de certains points de la tangente (D) au point de contact des deux cercles : en général, on peut construire, issues d'un point de (D) distinct de C, deux tangentes distinctes, une à Γ_1, une autre à Γ_2. Telle quelle, la configuration est déjà dotée d'un certain nombre de propriétés.

Exceptionnellement, ces deux droites se confondent. Les élèves doivent alors s'interroger sur les *propriétés nouvelles* causées par ces cas d'exception : « Quelles conséquences sur la configuration amène l'hypothèse d'un alignement des points U, T, V ? ». Les conjectures sur la nature des triangles UCV et ATB leur incombent. Il reste ensuite à élaborer et rédiger une démonstration de chaque conjecture, ce que l'énoncé de l'exercice proposé formalise.

[2] Voir « *Réussir l'épreuve sur dossier du CAPES de Mathématiques* », G. Julia, éditions Dunod pages 65 à 67.