# ESD 2008 - 0704 : Fonctions et équations

Auteur du corrigé : Gilbert Julia **TI-Nspire™ CAS**

***Avertissement** : ce document a été réalisé avec la version 1.6. de TI-Nspire.*

**Fichier associé :** esd2008_0704.tns

## 1. Le sujet

### L'exercice proposé au candidat

Soit $k$ un réel. On considère la fonction $F$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \int_0^x e^{kt^2}\,dt$.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de $F$ et l'on s'intéresse au nombre de points $M_0$ d'abscisse $x_0$ appartenant à $\mathcal{C}$ et en lesquels la tangente à $\mathcal{C}$ a un coefficient directeur égal à $x_0$.

**1)** Montrer qu'un tel point $M_0$ existe si et seulement si $x_0 > 0$ et vérifie l'équation **(E)** : $\ln x = k\,x^2$.

**2) a)** En utilisant une calculatrice graphique et en faisant varier les valeurs de $k$, conjecturer le nombre de solutions de l'équation **(E)** dans $]0\,;+\infty[$.

**b)** Si $k > 0$, trouver graphiquement une valeur approchée de $k$ pour laquelle l'équation **(E)** a une unique solution dans $]0\,;+\infty[$.

**3)** Démontrer que pour $k < 0$, l'équation **(E)** a une unique solution dans $]0\,;+\infty[$.

### Le travail demandé au candidat

**Q1)** Présenter, à l'aide de la calculatrice, la ou les représentations permettant de faire les conjectures demandées à la question **2)**.

**Q2)** Proposer une solution de la question **3)** de l'exercice telle que le candidat la présenterait à des élèves de terminale.

## 2. Eléments de correction

L'exercice porte sur l'étude d'une propriété tangentielle de la courbe représentative d'une fonction $F$ définie par une intégrale (posséder une tangente de direction remarquable). Cependant, les élèves (et le candidat) sont invités à transformer le problème initialement posé en un autre problème équivalent, incontestablement plus intelligible, amenant à la résolution d'une équation numérique, l'équation : $F'(x) = x$. Cette équation dépend dans ce contexte d'un paramètre, compte tenu de la définition de la fonction $F$ en jeu.

En effet, les élèves doivent savoir caractériser $F$ comme étant la primitive de la fonction $t \mapsto f_k(t) = e^{kt^2}$ qui s'annule en zéro. A ce titre, la dérivée de $F$ est la fonction $f_k$ et la propriété géométrique recherchée a lieu au point d'abscisse $x$ de la courbe $\mathcal{C}$ si et seulement si le réel $x$ est solution de l'équation : $f_k(x) = x$ (1).

L'équation (1) n'a pas de solution dans $\mathbb{R}^-$. Elle est équivalente à : $x$ appartient à $]0\,;+\infty[$ et est solution de : $kx^2 = \ln(x)$, équation **(E)** de l'énoncé. Cette équation est justement celle à laquelle amènerait le problème géométrique suivant, plus facile à formuler :

« La parabole $\mathcal{P}_k$ d'équation $y = kx^2$ et la courbe $\mathcal{L}$ représentative de la fonction logarithme népérien ont-elles des points d'intersection ? Combien ? Peuvent-elles être tangentes ? »

## 3. Apport de la TI-Nspire

### a. Apports proposés

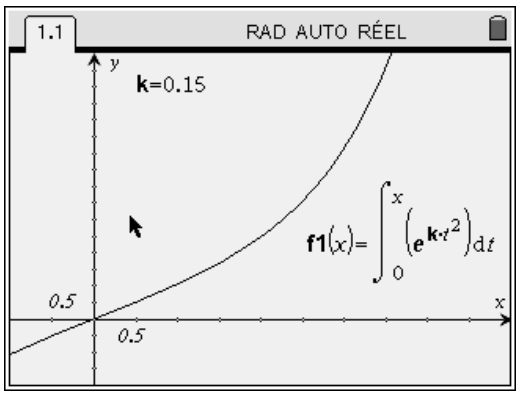
- Diverses représentations permettant d'émettre des conjectures.
- Aide à la résolution de la question 3 à l'aide du calcul formel.

### b. Approche empirique du problème initial

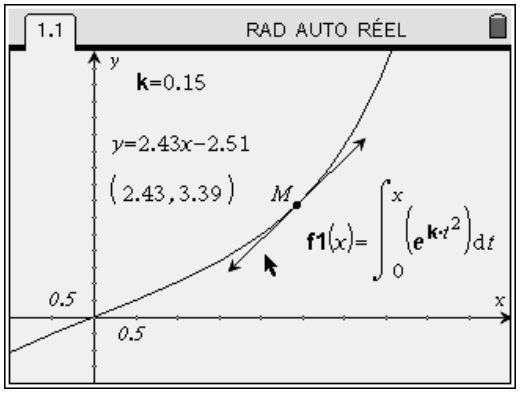
Ouvrir une page Graphiques & géométrie.

Editer (menu 1 6) un nombre (par exemple 0,15, pour lequel l'étude montrera que le problème posé a deux solutions) et le stocker (ctrl menu 5) dans la variable **k**.

Représenter graphiquement (menu 3 1) la fonction *F* (fonction *f1* ci contre). Ajuster la fenêtre d'affichage (menu 4 1, par exemple).




Définir un point *M* sur la courbe de la fonction *f1*.
Représenter la tangente (menu 6 7) à la courbe en ce point.et faire afficher son équation (menu 1 7).
En déplaçant le point *M* sur la courbe, on peut conjecturer pour cette valeur de *k* l'existence de deux points d'abscisses strictement positives qui sont solution du problème initial. L'un d'entre eux a une abscisse voisine de 2,43.
Le réglage de l'affichage des nombres est ici Flottant 3 pour ne pas surcharger l'écran : l'abscisse de *M* et le coefficient directeur de la tangente en *M* ont le même arrondi au centième (⌂ 8 1).
Il reste à modifier la valeur de *k*. Pour *k* = 0,2 par exemple, le coefficient directeur de la tangente demeure supérieur à l'abscisse du point de contact, le problème n'a pas de solution.



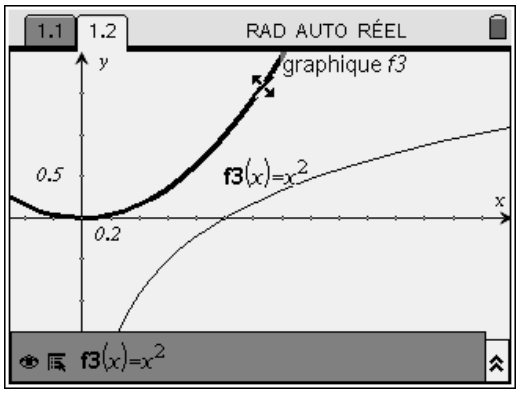

Cette approche reste tout de même peu significative.

### c. Approche empirique, pour *k* > 0, du problème équivalent

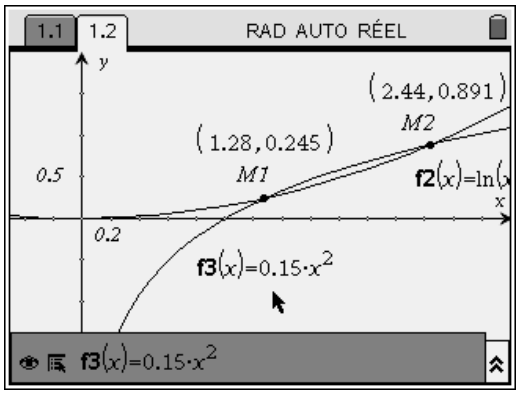
Une fois le problème reformulé, l'approche graphique prend davantage de sens : chercher des paraboles sécantes avec la courbe représentative de la fonction logarithme népérien.

Ouvrir une nouvelle page Graphiques & géométrie. Représenter graphiquement les fonctions *f2* et *f3* définies respectivement par : $f_2(x) = \ln x$ et $f_3(x) = x^2$.

Approcher le pointeur de la courbe de la fonction *f3* de façon que la poignée de déformation du graphique soit activée. Fermer la main (✋) et tirer sur la poignée. La déformation influe sur l'expression de la fonction *f3* représentée. On obtient des représentations $\mathcal{P}_k$ de fonctions de la forme : $x \mapsto k\,x^2$ pour diverses valeurs de *k*.



Lorsque la parabole est assez ouverte, on peut conjecturer l'existence de deux points d'intersection (menu 6 3) entre $\mathcal{P}_k$ et $\mathcal{L}$. C'est le cas par exemple lorsque le coefficient de $x^2$ est 0,15.




En tirant sur la parabole, ou bien en modifiant directement la valeur du coefficient $k$ de $x^2$ dans l'expression de $f_3(x)$, on constate que pour $k$ = 0,18 les deux courbes admettent deux points d'intersection et que pour $k$ = 0,19 elles n'en admettent plus aucun. On peut conjecturer l'existence d'une valeur $k_T$ comprise entre 0,18 et 0,19 pour laquelle les deux courbes sont tangentes et prévoir une discussion sur le nombre de points d'intersection suivant la valeur de $k$.

*Conjectures attendues :*

- Il existe une valeur $k_T$ comprise entre 0,18 et 0,19 pour laquelle les deux courbes sont tangentes. L'équation **(E)** a alors une unique solution, un seul point est solution du problème initialement posé.
- Si $0 < k < k_T$ alors les deux courbes ont deux points d'intersection (il existe alors deux points solutions du problème initial) et si $k > k_T$ elles n'en ont aucun (le problème posé n'a pas de solution).

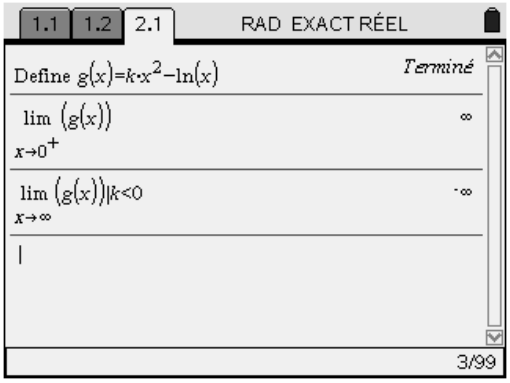
## d. Aide à la résolution de la question 3 (lorsque $k < 0$)

Cette question a pour objectif de déterminer le nombre de solutions d'une équation numérique à l'aide de l'étude des variations d'une fonction. En l'occurrence, la démarche pourrait être la suivante :

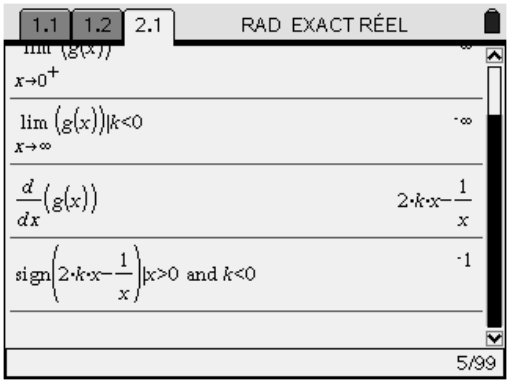
Définir sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ la fonction $x \mapsto g(x) = k\,x^2 - \ln x$ (ou son opposée).

L'équation **(E)** est équivalente à l'équation $g(x) = 0$. La fonction $g$ étant continue sur son intervalle de définition, l'étude de ses variations peut nous renseigner sur le nombre de fois que zéro en est valeur intermédiaire.

Ouvrir une nouvelle Activité et choisir Calculs.
En changeant d'activité, on peut réutiliser la variable $k$ sans interférer avec son rôle précédent.
Définir la fonction $g$. Calculer ses limites aux bornes de l'intervalle $]0\,;+\infty[$ à l'aide de l'outil « limite », accessible par exemple par menu 4 3. En zéro, le modèle permet d'indiquer que c'est la limite à droite de zéro que l'on cherche. En $+\infty$, il est nécessaire de contraindre la variable $k$ (sachant que $k < 0$).




La fonction $g$ est une somme de deux fonctions de référence continues et strictement décroissantes sur $]0\,;+\infty[$. Par conséquent, $g$ est elle-même continue et strictement décroissante sur cet intervalle et il n'est pas indispensable de calculer sa dérivée pour établir son sens de variation.
Cependant, le calcul de la dérivée et l'étude de son signe (sous contraintes $x > 0$ et $k < 0$) peut rassurer des élèves qui ne seraient pas convaincus que l'on peut s'en passer.
Le théorème des valeurs intermédiaires permet de conclure : $g$ est une bijection de $]0\,;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$. En particulier, $g$ prend une fois et une seule la valeur zéro. L'équation **(E)** a toujours une unique solution dans $]0\,;+\infty[$.

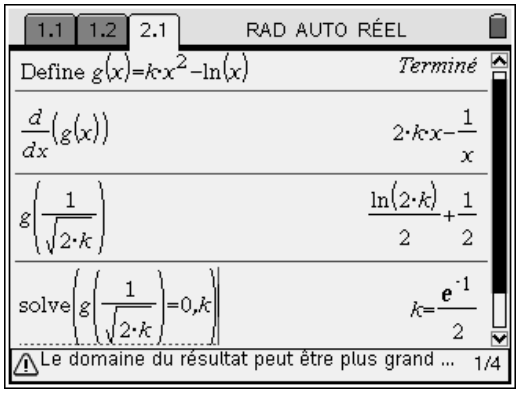


## 4. Pour aller plus loin.

### a. Aide à la résolution exacte de la question 2b (lorsque $k > 0$) et validation

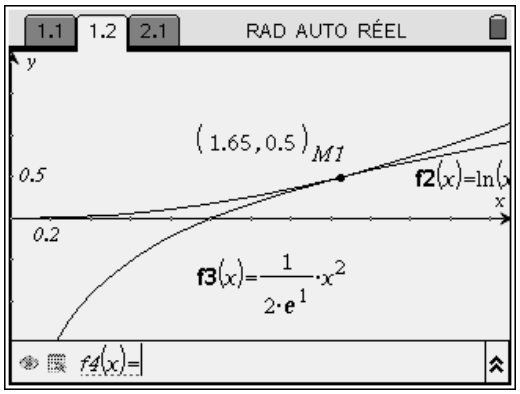
Les calculs précédents, notamment celui de la dérivée de $g$, sont d'actualité lorsque $k > 0$. La dérivée de $g$ change de signe lorsque $x = \sqrt{\frac{1}{2k}}$. Une étude fait apparaître que $g$ admet en ce point un minimum : $m(k) = \frac{1}{2}(1 + \ln 2k)$.

La fonction $g$ change ou non de signe et zéro est ou non valeur intermédiaire de $g$ suivant que le signe de $m(k)$ est négatif ou non. Il y a tangence en un point lorsque $m(k) = 0$ c'est-à-dire lorsque : $k = \frac{1}{2e}$.




L'abscisse du point de contact est la valeur de $\sqrt{\frac{1}{2k}}$ correspondante.

En revenant dans l'activité précédente, on peut vérifier que lorsqu'on attribue à $k$ cette valeur, l'écran ne présente qu'un seul point d'intersection entre les deux courbes. Il s'agit dans ce cas du point de coordonnées $\left(\sqrt{e}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$.




### b. Exemple de résolution approchée à l'aide de la méthode de dichotomie.

Explicitement au programme des classes de première et de terminale, la méthode de dichotomie peut s'appliquer ici, dès lors que l'on se donne une valeur de $k$ et que l'on a isolé, dans un intervalle $[a\ ;\ b]$, une valeur pour laquelle la fonction $g$ étudiée s'annule. Ci-dessous, un exemple de programme applique cette méthode à une fonction saisie en mémoire *f1* de la calculatrice. Ce programme dépend de trois arguments : les extrémités $a$ et $b$ (avec $a < b$) de l'intervalle d'isolation (intervalle dans lequel *f1* est strictement monotone et change de signe) ainsi que l'amplitude $e$ de l'encadrement recherché.
Exceptionnellement, nous avons reproduit un écran du logiciel ordinateur pour montrer plus commodément le programme et son exécution.