AL5 – PARTS DE MARCHÉ

TI-82 Stats – TI-83 Plus – TI-84 Plus

Mots-clés : matrice, probabilité, graphe, suite.

1. Objectifs

Traiter un exercice de deux façons différentes : avec les matrices, avec un graphe pondéré.

2. Correction et commentaires

Remarque : il s'agit de la même idée que la fiche **AL4 – Mouvements de population**, *mais avec un graphe à trois sommets.*

♦ **Partie A : en utilisant les matrices**

1) Initialement, la part de marché de C est de 30 %. En effet, $100 - 20 - 50 = 30$. Le nombre de spectateurs étant de 100 000, A est fréquenté par 20 000 spectateurs, B par 50 000 et C par 30 000.

2) A l'issue du premier mois,
- 16 000 spectateurs restent fidèles à A ($20\,000 \times 80$ %), 2 000 le quittent pour B ($20\,000 \times 10$ %) et 2 000 le quittent pour C ($20\,000 \times [100\% - 80\% - 10\%]$) ;
- 35 000 spectateurs restent fidèles à B, 10 000 le quittent pour A et 5 000 pour C ;
- 18 000 spectateurs restent fidèles à C, 9 000 le quittent pour A et 3 000 pour B.

Ce qui donne, en pourcentages :
- 16 % des spectateurs restent fidèles à A ($0{,}2 \times 0{,}8 = 0{,}16$), 2 % le quittent pour B et 2 % pour C.
- 35 % des spectateurs restent fidèles à B, 10 % le quittent pour A et 5 % pour C.
- 18 % des spectateurs restent fidèles à C, 9 % le quittent pour A et 3 % pour B.

Donc $A_1 = 16 + 10 + 9 = 35$ %, $B_1 = 2 + 35 + 3 = 40$ %, $C_1 = 2 + 5 + 18 = 25$ % .

3)

mois	*A*	*B*	*C*
0	$A_0 = 20$ %	$B_0 = 50$ %	$C_0 = 30$ %
1	$A_1 = 35$ %	$B_1 = 40$ %	$C_1 = 25$ %
2	$A_2 = 44$ %	$B_2 = 34$ %	$C_2 = 23$ %

4) Événements et probabilités :

A : « C'est un spectateur du circuit A »,
$p(A) = \dfrac{16\,000}{100\,000} = 0{,}16$ (16 %) ;

B : « C'est un ancien spectateur du circuit A qui a changé pour le circuit B »,
$p(B) = \dfrac{2\,000}{100\,000} = 0{,}02$ (2 %) ;

On résume dans un tableau les résultats :

	A	*B*	*C*	Total
A	16 000	10 000	9 000	35 000
B	2 000	35 000	3 000	40 000
C	2 000	5 000	18 000	25 000
Total	20 000	50 000	30 000	100 000

C : « Sachant que c'est un ancien du circuit A, il a changé pour le circuit B »,
$p(C) = \dfrac{2\,000}{20\,000} = 0{,}1$ (soit 10 % ; ce résultat est donné dans l'énoncé) ;

D : « Sachant qu'il a changé de circuit, il est actuellement spectateur du circuit A »,

$$p(D) = \frac{10\,000 + 9\,000}{10\,000 + 9\,000 + 2\,000 + 3\,000 + 2\,000 + 5\,000} = \frac{19\,000}{31\,000} = \frac{19}{31} \approx 0{,}61.$$

5) version empirique et non rigoureuse :

On hésite entre les deux matrices $[A] = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix}$ ou $[B] = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}7 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix}$.

P_0 représente les parts de marché initiales. Soit $P_0 = (0{,}2 \quad 0{,}5 \quad 0{,}3)$, que l'on représente par la matrice [C] de la calculatrice. On effectue donc les calculs ci-contre.

```
[C]*[A]
 [[.24 .42 .29]]
```

```
[C]*[B]
 [[.35 .40 .25]]
```

On en déduit que la bonne réponse est la matrice [B].

6) Matrice P_2

$P_2 = P_1 \times B = (P_0 \times B) \times B = P_0 \times (B \times B) = P_0 \times B^2$.

7) Avec la calculatrice

On retrouve, en calculant les produits de matrices [C] × [B] et [C] × [B] ^ 2, les résultats P_1 et P_2 du tableau de la question **3)**. Les *écrans* ci-dessous donnent les parts de marché de chaque circuit au bout de 3 mois, de 6 mois et d'un an.

Remarque : dans ces écrans, les résultats sont arrondis au centième (**Fix 2**).

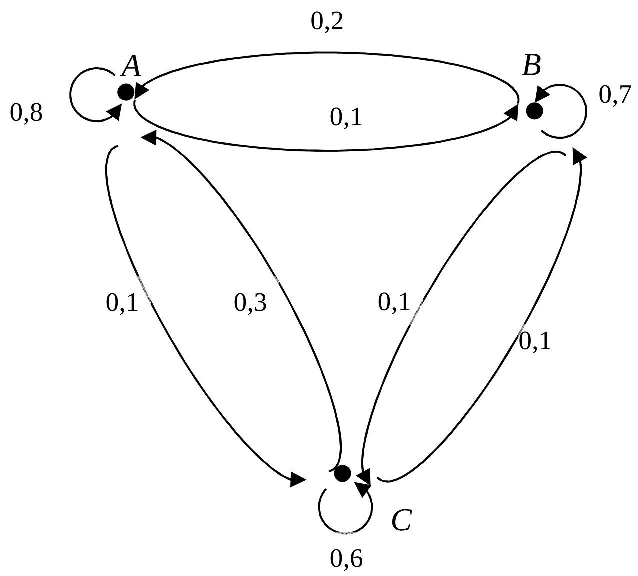
```
[C]*[B]^3
 [[.48 .30 .21]]
```

```
[C]*[B]^6
 [[.54 .26 .20]]
```

```
[C]*[B]^12
 [[.55 .25 .20]]
```

♦ **Partie B : en utilisant les graphes**

1) Graphe pondéré : voir ci-contre.



2) Matrice de transition :

		Arrivée		
		A	B	C
Départ	A	0,8	0,1	0,1
	B	0,2	0,7	0,1
	C	0,3	0,1	0,6

D'où la matrice de transition :

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}7 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix},$$

appelée [B] dans la calculatrice.

3) Situation stable

L est une position stable $\Leftrightarrow L \times M = L$.

On calcule le produit $L \times M = (0{,}5\,x - 0{,}1\,y + 0{,}3 \quad 0{,}6\,y + 0{,}1 \quad -0{,}5\,x - 0{,}5\,y + 0{,}6)$

On doit résoudre le système : $\begin{cases} 0{,}5\,x - 0{,}1\,y + 0{,}3 = x \\ 0{,}6\,y + 0{,}1 = y \\ -0{,}5\,x - 0{,}5\,y + 0{,}6 = 1 - x - y \end{cases}$.

Celui-ci admet pour solution $(x \quad y) = (0{,}55 \quad 0{,}25)$.

4) $\lim\limits_{n \to +\infty} M^n = \begin{pmatrix} 0{,}55 & 0{,}25 & 0{,}20 \\ 0{,}55 & 0{,}25 & 0{,}20 \\ 0{,}55 & 0{,}25 & 0{,}20 \end{pmatrix}$

(on conjecture ce résultat dans l'*écran* ci-contre).

Remarque : les résultats de [B]^10 *sont arrondis au centième.*

```
[B]^10
 [[.55 .25 .20]
  [.55 .25 .20]
  [.55 .25 .20]]
```

Annexe

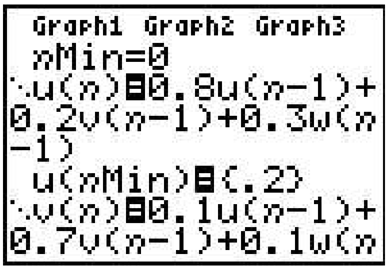
Complément : programmation des valeurs par des suites

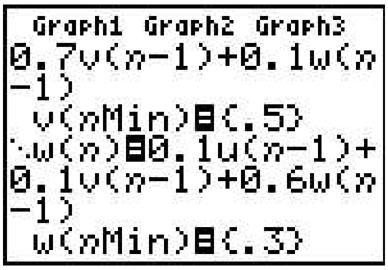
On a les formules suivantes :

- $a_{n+1} = 0{,}8\ a_n + 0{,}2\ b_n + 0{,}3\ c_n$;
- $b_{n+1} = 0{,}1\ a_n + 0{,}7\ b_n + 0{,}1\ c_n$;
- $c_{n+1} = 0{,}1\ a_n + 0{,}1\ b_n + 0{,}6\ c_n$.

On enregistre ces formules dans l'éditeur de suites :

MODE Suit, **Y=** .





On obtient les valeurs ci-contre.