Minsta arean av en konservburk

http://datagenetics.com/blog/august12014/index.html

En läskburk (eller en konservburk) har en volym på 330 cm^3. Vilken radie ska burken ha för att minimera dess area och därigenom mängden plåt? Hur stor blir arean av plåten.

Innan beräkningarna utförs bör eleverna samla in lite uppgifter om radie och höjd på olika typer av burkar. När beräkningarna är klara ska de sedan analysera hur väl det stämmer med de faktiska måtten.

Denna uppgift kräver att eleverna har en viss vana att kunna ställa upp uttryck utifrån ett praktiskt problem och att de kan lösa ut variabler. I den senare delen av uppgiften behöver de ha erfarenhet av problemlösning med derivator.

Här gäller det att ställa upp uttryck för volym och area hos burken. Vi kallar radien för *r* och höjden på burken för *h*.

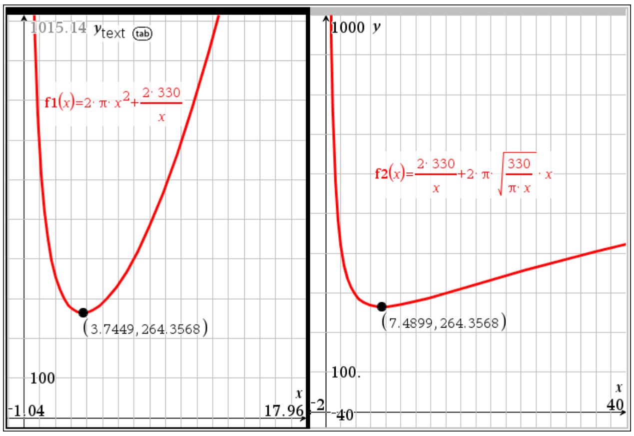
$$V=\pi\cdot r^2\cdot h \qquad A=2\cdot\pi r^2+2\cdot\pi r\cdot h$$

Vi löser ut *h* i det första uttrycket och sätter ini det andra. Detta ger

$$A=2\cdot\pi r^2+2\cdot\pi r\cdot\frac{V}{\pi\cdot r^2}=2\cdot\pi r^2+\frac{2V}{r}$$

Man kan nu rita Uttrycket för arean som funktion av r. Vi sätter in värdet 330 på volymen. Vi har här en delad sida med två graffönster öppna. Detta visas av det vänstra graffönstret nedan. Man kan välja ett antal olika sidlayouter.
I grafen till höger har vi istället ritat Arean som funktion av höjden. Lite krångligare och man kan räkna med att endast några elever klara av detta eftersom man ska lösa ut *r* ut volymformeln och sätta in i areaformeln.

Vi får nu grafer där den vänstra visar hur aren beror av radien och den högra hur arean beror av höjden.



Det verkar som värdet i minimipunkten för *h* är dubbelt så stort som värdet för *r*. *Är det alltid så*? Den sista deluppgiften blir att beräkna förhållandet mellan radien och höjden. Minsta arean blir ca 264 cm^2.

För att beräkna ett exakt samband mellan radie och höjd måste vi använda oss av derivator. Man kan följa beräkningarna i de två anteckningssidorna nedan.

Volymen = $\pi\cdot r^2\cdot h$

Arean av plåten: $2\cdot\pi\cdot r^2+2\cdot\pi\cdot r\cdot h$

Vi kan nu lösa ut *h* ur det första uttrycket ($h=\frac{v}{\pi\cdot r^2}$) och få ett uttryck för arean uttryckt i *r*. Vi betraktar *v* som en konstant.

Arean blir då $2\cdot\pi\cdot r^2+2\cdot\frac{v}{r^2\cdot\pi}\cdot\pi\cdot r$

Vi ***deriverar*** för att söka ett minsta värde på arean: $\frac{d}{dr}\left(2\cdot\pi\cdot r^2+\frac{2\cdot v}{r}\right) \blacktriangleright 4\cdot\pi\cdot r-\frac{2\cdot v}{r^2}$

Vi söker derivatans nollställe:

$\text{solve}\left(4\cdot\pi\cdot r-\frac{2\cdot v}{r^2}=0,r\right) \blacktriangleright r=\frac{2^{\frac{2}{3}}\cdot v^{\frac{1}{3}}}{2\cdot\pi^{\frac{1}{3}}}$

r^3 ger ett enklare uttryck:

$r^3|r=\frac{2^{\frac{2}{3}}\cdot v^{\frac{1}{3}}}{2\cdot\pi^{\frac{1}{3}}} \blacktriangleright \frac{v}{2\cdot\pi}$

Nu är $v=\pi\cdot r^2\cdot h$, vilket ger $r^3=\frac{\pi\cdot r^2\cdot h}{2\cdot\pi}$

Vi förenklar genom att förkorta bort r^2 och π och får då $r=\frac{h}{2}$.

Om man minimera arean av en ”form” för en given volym så ska man välja ett *klot*. Det skulle dock vara ganska opraktiskt.
Vilken area skulle ett klot ha om dess volym var 330 cm^3? Se beräkningarna nedan.

Vilken area har en sfär vars volym är 330 cm^3?

$V=\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3 \qquad \mathbf{A}=4\cdot\pi\cdot r^2$

Vi löser ut *r* från volymuttrycket och sätter in i uttrycket för arean:

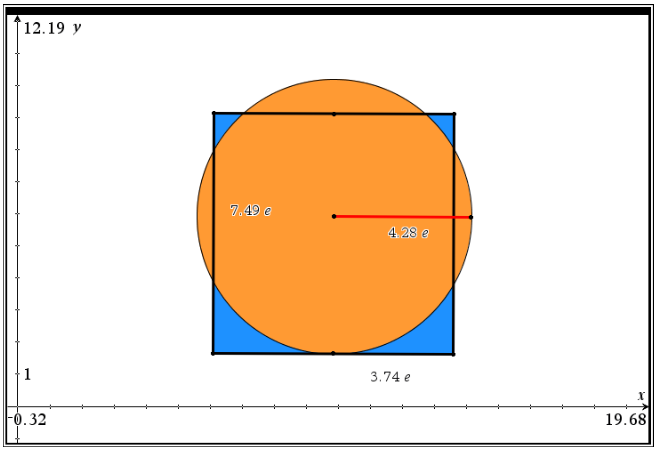
$r=\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} \Rightarrow \mathbf{A}=4\cdot\pi\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}\right)^2=4\cdot\pi\left(\frac{3\cdot v}{4\cdot\pi}\right)^{\frac{2}{3}}$

Vi sätter in värdet 330 på volymen i uttrycket och får då

$4\cdot\pi\left(\frac{3\cdot 330}{4\cdot\pi}\right)^{\frac{2}{3}} \blacktriangleright 230.937$

Minsta värdet för cylinderformen blev ju 264 cm^3. Hur är det med en kub som har volymen 330 cm^3?

Här har vi skalriktigt ritat ”burken”, där förhållandet radie/höjd är ½, och ett klot där båda har samma volym. Klotet har ju den mest yteffektiva formen. Arean för burken är enligt tidigare beräkningar ca 264 cm^3 och arean för klotet ca 231 cm^3.



På
http://datagenetics.com/blog/august12014/index.html
kan ni hitta en del intressanta fakta om olika typer av förpackningar.

En liten utvikning om klot och cylindrar.
På hans gravsten finns en inskription av π, hans mest berömda upptäckt. Där finns också ett klot med en omskriven cylinder, där förhållandet radie/höjd är 1:2. Han upptäckte att förhållandet mellan klotets volym och cylinderns volym var 2:3.

$$\frac{\text{Klotets volym}}{\text{Cylinderns volym}} = \frac{\frac{4}{3}\cdot \pi r^3}{\pi r^2 \cdot 2r} = \frac{2}{3}$$

Vad är förhållandet mellan areorna?