EP 077 - 2009 : Suites, approximation d'un réel

Auteur du corrigé : Alain SOLEAN **TI-Nspire™ – TI-Nspire™ CAS**

Avertissement *: ce document a été réalisé avec la version* 1.7

Fichier associé : EP077_2009_Suites.tns

1. Le sujet

Sujet 077 de l'épreuve pratique 2009 – Suites, approximation d'un réel

Enoncé

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par $a_0 = 9$ et, pour tout entier $n \geq 0$:

$$b_n = \frac{25}{a_n^{\ 2}} \text{ et } a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3}$$

On se propose d'étudier la monotonie et la limite de chacune de ces deux suites.

Partie A

1. Sur un tableur, créer trois colonnes donnant les valeurs de n, de a_n et de b_n, pour n entier variant de 0 à 20.

2. En observant les résultats obtenus sur le tableur, conjecturer, pour chacune des suites (a_n) et (b_n), la monotonie et une valeur approchée de la limite à 10^{-6} près.

3. On considère la suite (c_n) définie, pour tout entier $n > 0$, par $c_n = a_n^{\ 3}$.
Créer une nouvelle colonne du tableur pour calculer les termes c_n, pour n variant de 0 à 20.
Émettre alors une conjecture sur la valeur exacte de la limite de la suite (a_n).

4. Conjecturer de même la valeur exacte de la limite de la suite (b_n).

Partie B

5. On admet que, pour tout entier $n \geq 0$, $b_n^{\ 3} \leq 25 \leq a_n^{\ 3}$
Après avoir vérifié que, pour tout entier $n \geq 0$, on a $a_{n+1} - a_n = \frac{b_n - a_n}{3}$, démontrer les résultats conjecturés à la question **2.** sur la monotonie des suites (a_n) et (b_n).

6. Citer les théorèmes qui permettent de conclure que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes.

7. On désigne par ℓ et ℓ' les limites respectives des suites (a_n) et (b_n).
En utilisant les relations qui définissent ces deux suites, démontrer les résultats conjecturés aux questions **3.** et **4.** sur les valeurs exactes des réels ℓ et ℓ'.

Production demandée

- Obtention à l'écran des termes a_n, b_n et c_n, pour n entier variant de 0 à 20.
- Conjecture sur les valeurs exactes des limites des suites (a_n) et (b_n).
- Démarches et réponses argumentées aux questions **5.** et **7.**

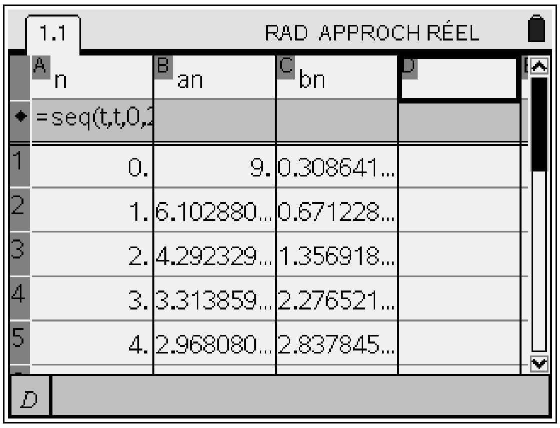
Compétences évaluées

- Utiliser un tableur pour étudier des suites définies par récurrence.
- Émettre et tester des conjectures.
- Étudier les variations d'une suite.
- Déterminer la limite d'une suite.

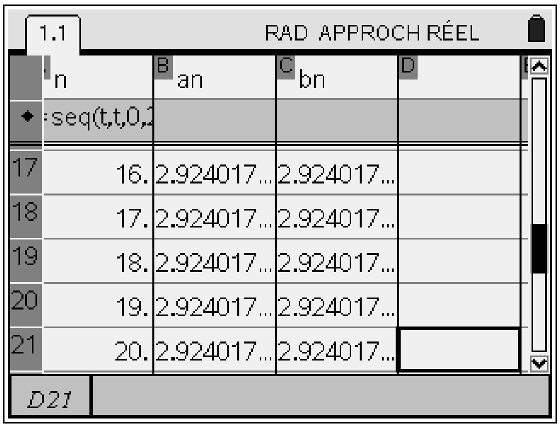
2. Corrigé

Partie A

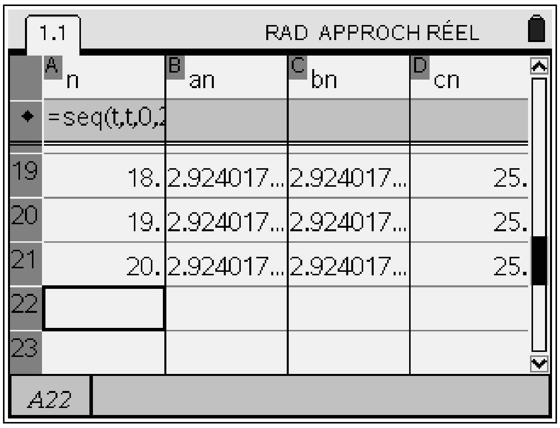
1) Ouvrir une page **Tableurs & listes**.



Dans la cellule grisée de la colonne **A**, écrire la formule **= seq(t,t,0,20)** qui permet d'établir la colonne donnant les valeurs de n. Puis nommer la colonne **n**.
Dans la cellule **B1** inscrire 9 (correspondant à a_0). Dans la cellule **C1** écrire la formule **= 25/B1^2** (donnant b_0).
Écrire dans la cellule **B2** la formule **= (2B1 +C1)/3** et dans la cellule **C2** inscrire **= 25/B2^2**.
Copier ces deux cellules et les « recopier » jusqu'à la ligne 21.
Nommer les colonnes **B** et **C** respectivement **an** et **bn**.



2) D'après les résultats obtenus sur le tableur, on peut conjecturer que la suite (a_n) est décroissante et convergente, et que la suite (b_n) est croissante et convergente. On peut aussi conjecturer que les deux suites ont des limites égales.
La limite commune vaut environ 2,924017 à 10^{-6} près.



3) Dans la cellule **D1** écrire la formule **= B1^3**. Copier cette formule et la copier jusqu'à la cellule D21. Nommer **cn** la colonne **D**.
On peut donc conjecturer que la limite de la suite (a_n) est $\sqrt[3]{25}$.

4) De même la limite de la suite (b_n) est $\sqrt[3]{25}$.

Partie B

5) Pour tout $n \geq 0$, on a **:** $a_{n+1} - a_n = \dfrac{2a_n + b_n}{3} - a_n = \dfrac{b_n - a_n}{3}$

donc on a aussi : $a_{n+1} - a_n = \dfrac{\dfrac{25}{a_n^2} - a_n}{3} = \dfrac{25 - a_n^3}{3\,a_n^2} \leq 0$.

On peut en conclure (d'après la propriété admise) que la suite (a_n) est décroissante.

Pour tout $n \geq 0$, on a aussi : $b_{n+1} - b_n = \dfrac{25}{a^2_{n+1}} - \dfrac{25}{a_n^2} = \dfrac{25(a_n + a_{n+1})(a_n - a_{n+1})}{a^2_{n+1}\,a_n^2} \geq 0$, donc la suite ($b_n$) est croissante.

6) La suite (a_n) est donc décroissante et minorée par 0, et la suite (b_n) est croissante et majorée par $\sqrt[3]{25}$ (d'après la propriété admise), donc elles sont convergentes.

7) Soit ℓ la limite de la suite (a_n) et ℓ' celle de la suite (b_n) . On doit avoir :

$$\ell = \frac{2\ell + \ell'}{3} \quad \text{donc } \ell = \ell'.$$

Comme, de plus, $\ell' = \dfrac{25}{\ell^2}$, on a bien $\ell^3 = 25$ donc $\ell = \ell' = \sqrt[3]{25}$.

Les conjectures des questions **3)** et **4)** sont bien vérifiées.