

Stage Statistique–Probabilités

TI graphiques (82, 83, 84)

Somme de 2 dés &
loi normale

Énoncé : On lance deux dés discernables, non pipés, et on s'intéresse à la variable aléatoire X égale à la somme des deux numéros obtenus.

Quelle est la loi de probabilité de cette variable, son espérance mathématique et son écart type ?

Partie 1 : L'étude théorique

Les valeurs possibles de X sont les entiers de 2 à 12.

Notons D_i la variable aléatoire donnant le résultat du dé n° i , $i \in \{1, 2\}$.

Les événements $(D_1 = j)$ et $(D_2 = k)$ sont indépendants, la probabilité de l'événement $(D_1 = j) \cap (D_2 = k)$ est égal au produit des probabilités de $(D_1 = j)$ et de $(D_2 = k)$, soit $\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$, les dés étant non pipés.

Pour obtenir $(X = 2)$, une seule possibilité $(D_1 = 1) \cap (D_2 = 1)$, probabilité $\frac{1}{36}$.

Pour obtenir $(X = 3)$, deux possibilités $(D_1 = 2) \cap (D_2 = 1)$ ou $(D_1 = 1) \cap (D_2 = 2)$, probabilité $\frac{2}{36}$.

Pour obtenir $(X = 4)$, trois possibilités $(D_1 = 3) \cap (D_2 = 1)$, $(D_1 = 2) \cap (D_2 = 2)$ ou $(D_1 = 1) \cap (D_2 = 3)$, probabilité $\frac{3}{36}$. Etc.

Pour obtenir $(X = 11)$, deux possibilités $(D_1 = 6) \cap (D_2 = 5)$ ou $(D_1 = 5) \cap (D_2 = 6)$, probabilité $\frac{2}{36}$.

Pour obtenir $(X = 12)$, une seule possibilité $(D_1 = 6) \cap (D_2 = 6)$, probabilité $\frac{1}{36}$.

Ce qui donne la loi suivante :

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$


Pour obtenir l'espérance mathématique et l'écart type, on peut utiliser la calculatrice. On commence par définir les deux listes. L1 contenant les x_i à l'aide de la fonction **suite**, L6 contenant les p_i .

```
suite(X,X,2,12)▶
{2 3 4 5 6 7 8 ▶
{1,2,3,4,5,6,5,▶
{.0277777778 .0▶
```

```
{2 3 4 5 6 7 8 ▶
{1,2,3,4,5,6,5,▶
{.0277777778 .0▶
L6▶Frac
{ 1/36 1/18 1/12 1/9 5/36 ▶
```

```
suite(x,x,2,12) [STO] L1
{1,2,3,4,5,6,5,4,...}/36
[STO] L6
```

On peut afficher les éléments de L6 sous forme de fractions.

```
moyenne(L1,L6)
7
moyenne((L1-7)^2,
5.83333333
Rep→Frac

```

Pour calculer la moyenne, on peut utiliser la fonction **moyenne** (2nd [LIST] menu **MATH**), on trouve 7. Pour la variance, attention, la fonction **variance**, dans le même menu, ne donne pas le résultat attendu mais une estimation de la variance d'une population d'où serait tiré l'échantillon (division par $n-1$ et non par n). On peut, par contre, utiliser la formule $V(X) = E\left[\left(X - E(X)\right)^2\right]$, ce qui donne :

$$V(X) = \frac{35}{6}.$$

Partie 2 : Une simulation

Dans le programme **SM2DES**, nous allons construire une liste **L1** contenant les résultats « possibles », puis recueillir dans la liste **L2** le nombre d'apparitions de chaque résultat lors de N boucles.

Algorithme	Programmation TI 82, 83, 84
Construction de la liste L1 des entiers de 2 à 12 Initialisation de la liste L2 Demande de la valeur de N Pour I allant de 1 à N Choisir un nombre entier A au hasard entre 1 et 6 Choisir un nombre entier B au hasard entre 1 et 6 Stocker la somme A+B dans S Construction de la liste L2 ¹ Fin de la boucle Pour Affichage de la moyenne des termes de L1 affectés des coefficients L2	suite(X,X,2,12)→L1 EffListe L2 11→dim(L2) Prompt N For(I,1,N) entAleat(1,6)→A entAleat(1,6)→B A+B→S L2(S-1)+1→L2(S-1) End moyenne(L1,L2)

Exemple d'utilisation du programme :

```
PrgrSM2DES
N=?500
7.138
```

L1	L2	# 3
2	11	.022
3	28	.056
4	40	.08
5	46	.092
6	62	.124
7	98	.196
8	73	.146
L3 = "L2/500"		

On trouve bien une moyenne proche de 7. On peut visualiser les listes **L1** et **L2**. On peut également construire la suite **L3** contenant les fréquences (noter les guillemets permettant de définir une formule attachée à **L3**) et la comparer à la liste des résultats théoriques **L6**.

Partie 3 : On répète l'expérience précédente...

On effectue des lancers successifs des deux dés, X_k représente la somme des deux nombres obtenus au k -ième lancer. Déterminer le nombre de lancers pour que la moyenne des résultats X_k diffère de 7 de moins de 0,1 avec une probabilité supérieure à 0,95.

Les X_k constituent une suite de variables indépendantes, de même loi, de moyenne 7 et d'écart type $\sqrt{\frac{35}{6}}$.

L'espérance mathématique de la somme est égale à la somme des espérances mathématiques, donc :

¹ Attention au décalage d'indice dû au fait que **L1** commence par 2.

$E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = 7n$, et comme, pour tout réel λ , $E(\lambda X) = \lambda E(X)$,

$$E\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}\right) = 7.$$

Nous savons que, pour tout réel λ , $V(\lambda X) = \lambda^2 V(X)$, en admettant que, si deux variables sont indépendantes, la variance de la somme est égale à la somme des variances ; on en déduit que :

$$V\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}\right) = \frac{35}{6n}.$$

Notons $F_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$ la variable représentant la moyenne des X_k et $Y_n = \frac{F_n - 7}{\sqrt{\frac{35}{6n}}}$ la variable

centrée réduite associée. Nous admettrons que, comme dans le théorème de Moivre-Laplace², Y_n converge en loi vers la variable normale centrée réduite Z quand n tend vers $+\infty$. En utilisant cette approximation, nous avons donc :

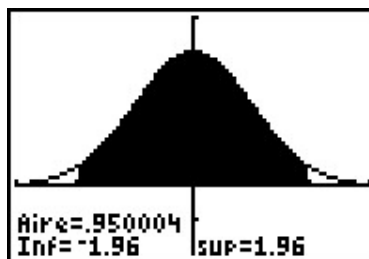
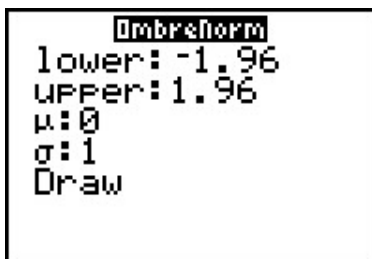
$$P(|F_n - 7| < 0,1) \approx P\left(|Z| < 0,1 \times \sqrt{\frac{6n}{35}}\right).$$

On est amené à chercher n tel que :

$$P\left(|Z| < 0,1 \times \sqrt{\frac{6n}{35}}\right) \geq 0,95.$$

Nous savons, d'après le programme, que si Z suit la loi normale centrée réduite, $P(|Z| < 1,96) \approx 0,95$.

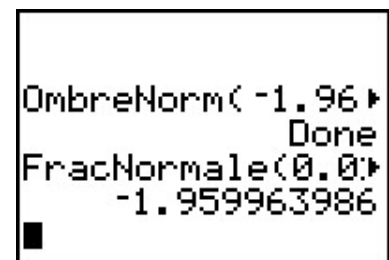
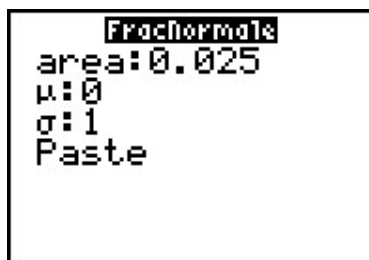
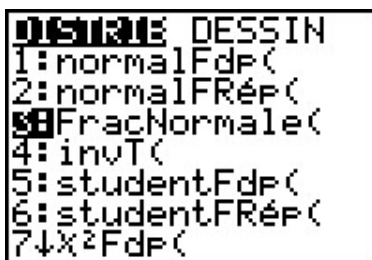
On peut retrouver ce résultat à l'aide de la calculatrice :



On peut visualiser cette probabilité à l'aide de la fonction **OmbreNorm** présente dans le menu **DESSIN** touche **[2nd][DISTR]** (seconde fonction de la touche **[VARS]**).

On remarquera la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées. Les aires des deux parties en blanc sont donc égales et correspondent chacune à la moitié de l'aire totale sous la courbe (soit 1) moins l'aire de la partie en noir (ici 0,95). On est amené à calculer le réel α tel que $P(Z \leq \alpha) = 0,025$.

On utilise pour cela la fonction **FracNormale** du menu **DISTRIB** (**[2nd][DISTR]**).



² Le théorème de Moivre-Laplace est un cas particulier du théorème central limit valable pour toute famille de variables indépendantes qui suivent une même loi.

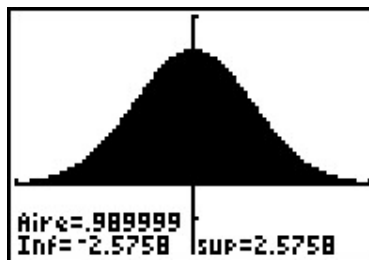
Il ne reste plus qu'à résoudre l'inégalité (affichage en mode **CLASSIC**) :

```
résoudre(6N/35-1
9.6²,N,1000)
2240.933333
```

On doit avoir $0,1 \times \sqrt{\frac{6n}{35}} \geq 1,96$,
il suffit donc de prendre $n \geq 2\,241$.

Si l'on veut une probabilité supérieure, par exemple 0,99 : on cherche α tel que $P(Z \leq \alpha) = \frac{1-0,99}{2} = 0,005$
et on procède comme ci-dessus.

```
OmbreNorm(-1.96▶
Done
FracNormale(0.01▶
-2.575829303
■
```



On doit avoir :

$0,1 \times \sqrt{\frac{6n}{35}} \geq 2,5758$, il suffit de
prendre $n \geq 3\,871$.