

## Stage Statistique–Probabilités

## TI-Nspire

Somme de 2 dés &  
loi normale

**Énoncé :** On lance deux dés discernables, non pipés, et on s'intéresse à la variable aléatoire  $X$  égale à la somme des deux numéros obtenus.

Quelle est la loi de probabilité de cette variable, son espérance mathématique et son écart type ?

## Partie 1 : L'étude théorique

Les valeurs possibles de  $X$  sont les entiers de 2 à 12.

Notons  $D_i$  la variable aléatoire donnant le résultat du dé n°  $i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ . Les événements  $(D_1 = j)$  et  $(D_2 = k)$  sont indépendants, la probabilité de l'événement  $(D_1 = j) \cap (D_2 = k)$  est égal au produit des probabilités de  $(D_1 = j)$  et de  $(D_2 = k)$ , soit  $\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$ , les dés étant non pipés.

Pour obtenir  $(X = 2)$ , une seule possibilité  $(D_1 = 1) \cap (D_2 = 1)$ , probabilité  $\frac{1}{36}$ .

Pour obtenir  $(X = 3)$ , deux possibilités  $(D_1 = 2) \cap (D_2 = 1)$  ou  $(D_1 = 1) \cap (D_2 = 2)$ , probabilité  $\frac{2}{36}$ .

Pour obtenir  $(X = 4)$ , trois possibilités  $(D_1 = 3) \cap (D_2 = 1)$ ,  $(D_1 = 2) \cap (D_2 = 2)$  ou  $(D_1 = 1) \cap (D_2 = 3)$ , probabilité  $\frac{3}{36}$ . Etc.

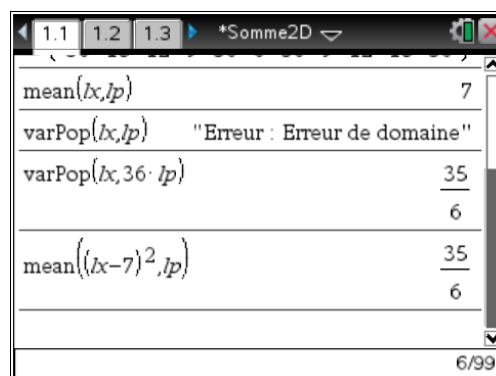
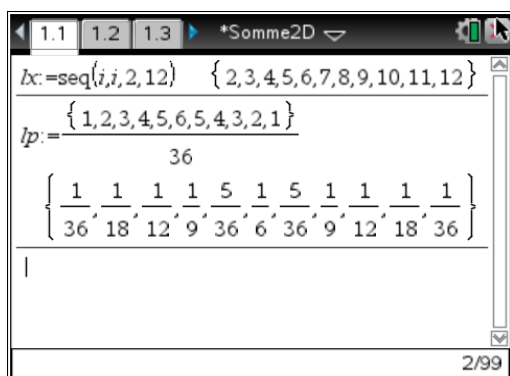
Pour obtenir  $(X = 11)$ , deux possibilités  $(D_1 = 6) \cap (D_2 = 5)$  ou  $(D_1 = 5) \cap (D_2 = 6)$ , probabilité  $\frac{2}{36}$ .

Pour obtenir  $(X = 12)$ , une seule possibilité  $(D_1 = 6) \cap (D_2 = 6)$ , probabilité  $\frac{1}{36}$ .

Ce qui donne la loi suivante :

$x_i$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p_i$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Pour obtenir l'espérance mathématique et l'écart type, on peut utiliser la calculatrice. On commence par définir les listes dans Calculs :  $l_x$  contenant les  $x_i$  à l'aide de la fonction **seq** et la liste  $l_p$  contenant les  $p_i$ .



Pour calculer la moyenne, on peut utiliser la fonction **mean (moyenne)** (menu **6 3 3**) ; on trouve 7. Pour la variance, on utilise la fonction **varPop** (variance de population menu **6 3 A**) ; attention, la fonction **varsamp** (variance d'échantillon menu **6 3 8**), dans le même menu, ne donne pas le résultat attendu mais une estimation de la variance d'une population d'où serait tiré l'échantillon (division par  $n-1$  et non par  $n$ ).

On peut vérifier le résultat en utilisant la formule :  $V(X) = E\left[\left(X - E(X)\right)^2\right]$ , ce qui donne :

$$V(X) = \frac{35}{6}.$$

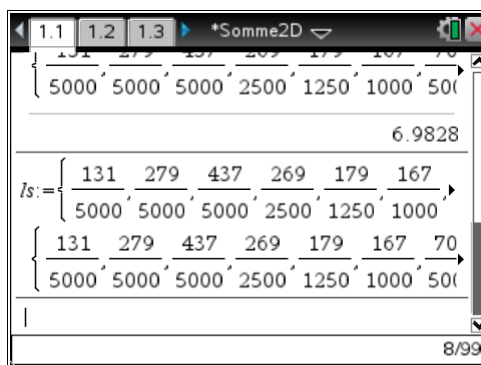
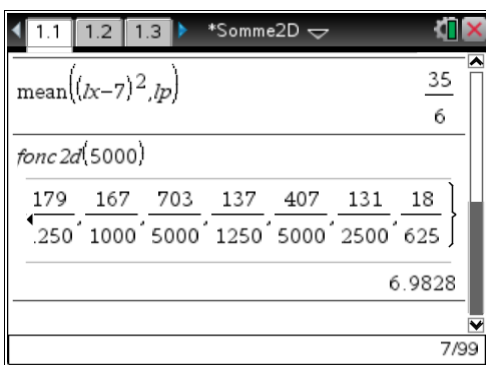
*Remarque* : le second argument de la fonction **varPop** doit être la liste des effectifs et non des fréquences.

## Partie 2 : Une simulation

La fonction **fonc2d**, construit une liste **l1** contenant les résultats « possibles », puis la liste **l2** donnant le nombre d'apparitions de chaque résultat lors de  $n$  boucles,  $n$  passé en paramètre. La fonction affiche la liste des fréquences  $l_2 / n$ , puis la valeur approchée de la moyenne.

Algorithme	Programmation TI-Nspire
<b>Déclaration</b> de la fonction avec l'option LibPub permettant l'accès à la fonction. <b>Déclaration</b> des variables locales <b>Construction</b> de la liste <b>l1</b> des entiers de 2 à 12 Initialisation de la liste <b>l2</b> <b>Pour</b> $i$ allant de 1 à $n$ Choisir un nombre entier $de1$ au hasard entre 1 et 6 Choisir un nombre entier $de2$ au hasard entre 1 et 6 Stocker la somme $de1 + de2$ dans $s$ <b>Construction</b> de la liste <b>l2</b> <sup>1</sup> <b>Fin</b> de la boucle <b>Affichage</b> de la liste des fréquences <b>Retourne</b> la valeur approchée de la moyenne des termes de <b>l1</b> affectés des coefficients <b>l2</b>	Define LibPub fonc2d(n)= Func Local s,de1,de2,i,l1,l2 l1:=seq(x,x,2,12) l2:=newList(11) For i,1,n de1:=randInt(1,6) de2:=randInt(1,6) s:=de1+de2 l2[s-1]:=l2[s-1]+1 EndFor Disp ((l2)/(n)) approx(mean(l1,l2)) EndFunc

Exemple d'utilisation de la fonction :



On trouve bien une moyenne proche de 7.

On peut récupérer la liste des fréquences en affectant à la variable **ls** la liste affichée par la fonction.

Pour cela, taper  $ls :=$  puis remonter dans l'historique, sélectionner la liste affichée et appuyer sur **enter**.

On peut représenter, pour les comparer, la liste des fréquences simulées et la liste des fréquences théoriques.

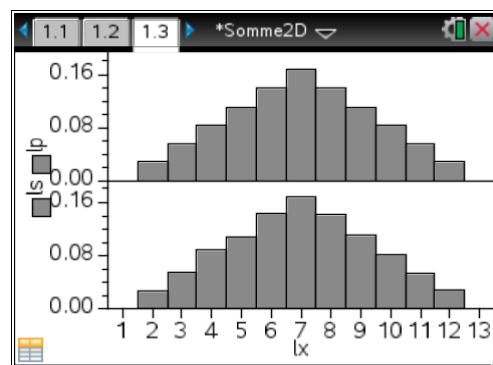
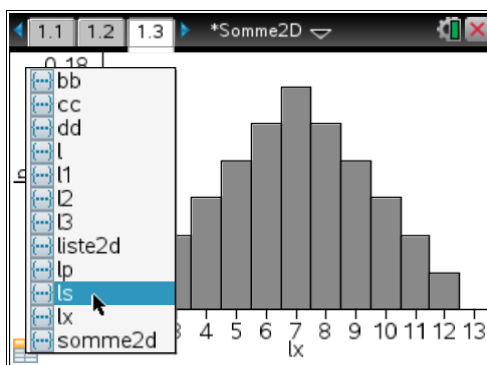
<sup>1</sup> Attention au décalage d'indice dû au fait que **l1** commence par 2.

**ctrl** **I** pour inclure une nouvelle page, choisir 4 : Tableur & listes. Dans la colonne A, on entre **lx** ; dans B, **lp** et enfin, dans C, **ls**. Sélectionner les deux premières colonnes, puis **menu** **3** **8** (**Résumé Graphique**).

	A	B	C
	=lx	=approx(lp)	=approx(ls)
1	2	0.027778	0.0262
2	3	0.055556	0.0558
3	4	0.083333	0.0874
4	5	0.111111	0.1076
5	6	0.138889	0.1432
6	7	0.166667	0.167



On valide, puis on ajoute l'autre histogramme : **menu** **2** **9**, choisir **ls**.



### Partie 3 : On répète l'expérience précédente...

On effectue des lancers successifs des deux dés ;  $X_k$  représente la somme des deux nombres obtenus au  $k$ -ième lancer. Déterminer le nombre de lancers pour que la moyenne des résultats  $X_k$  diffère de 7 de moins de 0,1 avec une probabilité supérieure à 0,95.

Les  $X_k$  constituent une suite de variables indépendantes, de même loi, de moyenne 7 et d'écart type  $\sqrt{\frac{35}{6}}$ .

L'espérance mathématique de la somme est égale à la somme des espérances mathématiques, donc :

$$E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = 7n, \text{ et comme, pour tout réel } \lambda, E(\lambda X) = \lambda E(X),$$

$$E\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}\right) = 7.$$

Nous savons que, pour tout réel  $\lambda$ ,  $V(\lambda X) = \lambda^2 V(X)$ , en admettant que si deux variables sont indépendantes la variance de la somme est égale à la somme des variances ; on en déduit que :

$$V\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}\right) = \frac{35}{6n}.$$

Notons  $F_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$  la variable représentant la moyenne des  $X_k$  et  $Y_n = \frac{F_n - 7}{\sqrt{\frac{35}{6n}}}$  la variable

centrée réduite associée. Nous admettrons que, comme dans le théorème de Moivre-Laplace<sup>2</sup>,  $Y_n$  converge en loi vers la variable normale centrée réduite  $Z$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

En utilisant cette approximation, nous avons donc :

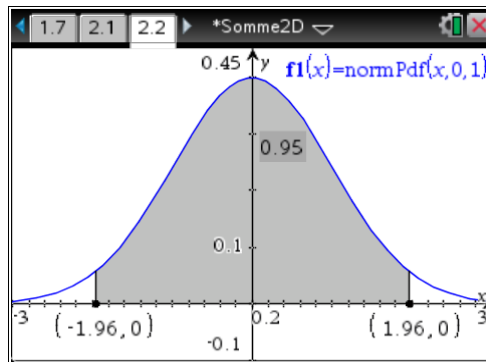
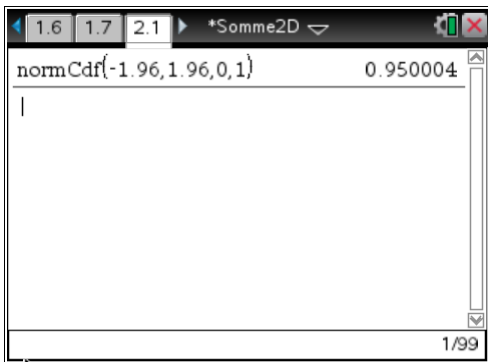
$$P(|F_n - 7| < 0,1) \approx P\left(|Z| < 0,1 \times \sqrt{\frac{6n}{35}}\right).$$

On est amené à chercher  $n$  tel que :

$$P\left(|Z| < 0,1 \times \sqrt{\frac{6n}{35}}\right) \geq 0,95.$$

Nous savons, d'après le programme, que si  $Z$  suit la loi normale centrée réduite,  $P(|Z| < 1,96) \approx 0,95$ .

On peut retrouver ce résultat à l'aide de la calculatrice et l'illustrer graphiquement :



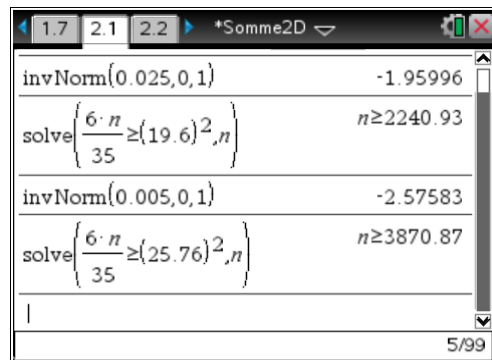
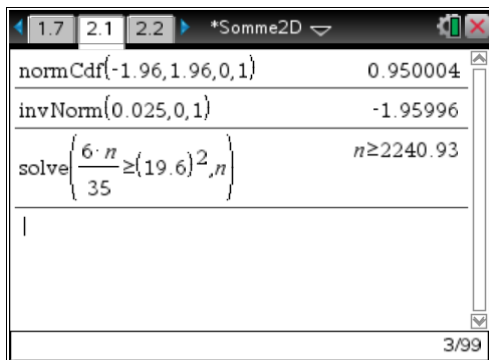
La fonction de répartition de la loi normale **normCdf** (menu **5** **5** **2**) permet de vérifier le résultat. Pour l'illustrer, on trace la fonction de densité de la loi normale **normPdf** (menu **5** **5** **1**) dans l'écran graphique.

On peut alors visualiser cette probabilité à l'aide de l'option **intégrale** (menu **6** **7**).

On remarquera la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées. Les aires des deux parties en blanc sont donc égales et correspondent chacune à la moitié de l'aire totale sous la courbe (soit 1) moins l'aire de la partie en gris (ici 0,95). On est amené à calculer le réel  $\alpha$  tel que  $P(Z \leq \alpha) = 0,025$ .

On utilise pour cela la fonction **InvNorm** (menu **5** **5** **3**) puis la fonction **solve** pour résoudre l'inégalité :

On doit avoir  $0,1 \times \sqrt{\frac{6n}{35}} \geq 1,96$ , il suffit donc de prendre  $n \geq 2\,241$ .



Si l'on veut une probabilité supérieure, par exemple 0,99 : on cherche  $\alpha$  tel que  $P(Z \leq \alpha) = \frac{1-0,99}{2} = 0,005$

et on procède comme ci-dessus. On doit avoir  $0,1 \times \sqrt{\frac{6n}{35}} \geq 2,5758$ , il suffit de prendre  $n \geq 3\,871$  (voir écran de droite).

<sup>2</sup> Le théorème de Moivre-Laplace est un cas particulier du théorème central limit valable pour toute famille de variables indépendantes qui suivent une même loi.