

F7n – COUP DE BOURSE, NOMBRE DÉRIVÉ

Auteur : S. & S. Etienne

TI-Nspire™ CAS

Mots-clés : représentation graphique, fonction dérivée, nombre dérivé, pente, tableau de valeurs, maximum, minimum.

Fichiers associés : F7nElev_Bourse_CAS.tns, F7nProf_Bourse_CAS.tns

1. Objectifs

Justifier et utiliser le nombre dérivé ; étudier une fonction, ses variations ; dresser un tableau de valeurs.

2. Énoncé

Par modélisation de la courbe d'une moyenne mobile 50¹ du cours journalier d'une action boursière, on détermine une fonction f définie par $f(x) = 0,008x^3 - 0,32x^2 + 3x + 14$ sur l'intervalle $[1 ; 31]$ qui correspond à un mois de 31 jours. Sa représentation graphique permet de visualiser la variation du cours de l'action en fonction du temps.

Une règle d'achat - vente de l'action est proposée à partir de la pente de la tangente à la courbe le jour considéré :

- Tant que la pente traduisant la hausse ou la baisse ne franchit pas un certain seuil il est conseillé de ne rien faire, d'attendre une plus grande évolution du marché.
- Plus cette pente est forte, plus le cours de l'action monte vite et plus il est conseillé d'acheter. On prendra 1,6 comme seuil dans ce cas.
- Plus la pente est négative, plus le cours de l'action descend fort, plus il faut se dépêcher de vendre. On prendra -0,8 comme seuil dans ce cas.

La pente de la tangente en un point d'une courbe n'est autre que le nombre dérivé en ce point.

Le nombre dérivé est un nombre, donc facilement analysable, y compris par un outil informatique (tableur sur ordinateur ou calculatrice).

On utilisera donc en fin d'exercice les fonctions du tableur pour afficher automatiquement la décision à prendre.

Il sera demandé d'étudier la fonction donnée sur l'intervalle considéré : dérivée, signe de la dérivée, maximum, minimum.

3. Commentaires

Cet exercice permet une justification de l'utilisation du nombre dérivé, de son interprétation comme pente de la tangente au point considéré. La calculatrice ou le logiciel TI-Nspire affiche un tableau de valeurs comprenant les fonctions du tableur, ce qui permet, en plus, de proposer une activité conditionnelle sur les valeurs obtenues du tableau.

4. Conduite de l'activité

Il est conseillé au professeur, de travailler dans le même format d'écran que les élèves avec leur calculatrice. Choisir dans le menu Affichage/View Unité TI-Nspire CAS.

¹ Définition mathématique un peu compliquée : pour une suite de valeurs (u_n) , la moyenne mobile d'ordre k (avec $k \leq n$)

de (u_n) est la suite (m_n) définie par $m_n = \frac{1}{k} \sum_{i=n}^{i=n+k-1} u_i$.

Traduction « boursière » de la moyenne des 50 : depuis le cours du jour (inclus) calculer la moyenne des 50 valeurs précédentes, l'appliquer à la date du jour (alors qu'en mathématiques, on l'appliquerait à la date « milieu de l'intervalle »). Recommencer avec le cours du jour précédent (ce qui a déjà été calculé quand on utilise cette règle).

Énoncé du problème

1.1 1.2 1.3 1.4 ▶ RAD AUTO RÉEL

Par modélisation de la courbe d'une moyenne mobile 50 du cours journalier d'une action boursière, on détermine une fonction f définie par

$$f(x) = 0,008x^3 - 0,32x^2 + 3x + 14$$

sur l'intervalle $I = [1 ; 31]$ correspondant à un mois de 31 jours.

Les élèves répondront directement dans l'espace **Réponse** ou en créant une nouvelle page avec l'application **Editeur mathématique** (voir fichier F7nProf_Bourse_CAS.tns).

Dans ce fichier, on a défini la fonction f par « Define $f(x)$ ». On aurait pu écrire : « $f(x) :=$ ».

Si l'élève calcule chaque résultat, il semble opportun de lui indiquer que la calculatrice est une aide intéressante et appréciable pour calculer des multiples valeurs (définir la fonction, demander une valeur particulière de la fonction ou un tableau de valeurs...)

1.1 1.2 1.3 1.4 ▶ RAD AUTO RÉEL

Question

$$f(x) = 0,008x^3 - 0,32x^2 + 3x + 14$$

1. Calculer $f(1)$; $f(10)$; $f(20)$; $f(31)$.

Réponse ⌵

Calcul de la fonction dérivée

On suppose que les élèves se sont aguerris aux calculs des fonctions dérivées sur de nombreux exemples.

Si l'élève ne dispose pas d'une calculatrice effectuant du calcul formel, il détermine la dérivée. Sinon, il peut utiliser directement une « boîte noire », par calcul direct à la machine, dans une page de Calculs.

Sur TI-Nspire, on ne peut pas nommer une fonction « f' ». On utilise donc ici ff pour la dérivée.

1.2 1.3 1.4 1.5 ▶ RAD AUTO RÉEL

Question

2. Sur I , calculer $f'(x)$ où f' est la fonction dérivée de la fonction f .

Réponse ⌵

Ils découvrent, ou ont découvert, en première les équations du second degré. Ils savent désormais « rédiger » le texte permettant de justifier les résultats fournis par la calculatrice.

1.2 1.3 1.4 1.5 RAD AUTO RÉEL

2. Sur I, calculer $f'(x)$ où f' est la fonction dérivée de la fonction f .

Réponse

Dans une page de calcul, $ff(x) := \frac{d}{dx}(f(x))$
 puis $ff(x)$ affiche $0.024x^2 - 0.64x + 3$

Le signe de la fonction dérivée nous intéresse pour déterminer les variations de la fonction.

Auparavant, nous voulons obtenir une approximation des extremums (pour le jour correspondant).

1.3 1.4 1.5 1.6 RAD AUTO RÉEL

Question

3. Résoudre $f'(x)=0$. On donnera les valeurs exactes puis arrondies à l'unité près. Valeur approchée du cours du jour correspondant.

Réponse

Calculs puis valeur en « cours du jour ».

1.4 1.5 1.6 1.7 RAD AUTO RÉEL

$\text{solve}(f'(x)=0, x)$ $x=6.0685 \text{ or } x=20.5982$

"valeurs arrondies à 6 et 21"

"valeurs arrondies à 6 et 21"

$f(6)$	22.2
$f(21)$	9.97

4/99

On demande ici à l'élève de justifier les résultats...

1.5 1.6 1.7 1.8 RAD AUTO RÉEL CAPS

Question

4. Résoudre $f'(x) \geq 0$. Signe de la dérivée. Variations de f sur I . Extremums.

Réponse ⌵

C'est un polynome du 2ème degré il est du signe de a à l'extérieur des racines.

... et de les faire calculer.

On obtient un maximum relatif ainsi qu'un minimum absolu ($x \in [1 ; 31]$).

1.6 1.7 1.8 1.9 RAD AUTO RÉEL

$\text{solve}(f'(x) \geq 0, x)$	$x \leq 6.07 \text{ or } x \geq 20.6$
$\text{zeros}(f'(x), x) \rightarrow \text{sol}$	$\{6.07, 20.6\}$
$f(\text{sol}[1])$	22.2
$f(\text{sol}[2])$	9.94

4/99

On attend de l'élève, qu'il commence par ouvrir une nouvelle page «Tableur et listes», ce qui lui permettra d'obtenir des indications pour régler les paramètres de la fenêtre d'affichage. Ensuite, il devra ouvrir une nouvelle page «Graphiques et géométrie» et demander le tracé de la fonction f . Dans le tableur, on définira, dans la partie grisée des deux premières colonnes, une liste de 1 à 31 par : $=\text{seq}(i, i, 1, 31)$ et $=f(a[i])$ pour obtenir les images par f .

1.7 1.8 1.9 1.10 RAD AUTO RÉEL

Question

5. Représenter graphiquement cette fonction sur I .

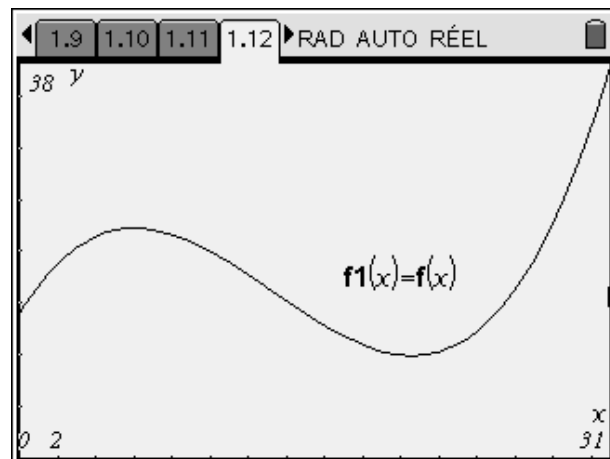
Réponse ⌵

Un tableau de valeurs permet de définir la fenêtre. x varie de 1 à 31 et y de 0 à 38.

La fonction est affichée dans le repère « judicieux ».
D'après le tableau de valeurs précédent, après avoir sélectionné le menu **4. Fenêtre**, puis **1. Réglages de la fenêtre**, on choisit :

$$x_{\text{Min}} = 0 ; x_{\text{Max}} = 31 ; y_{\text{Min}} = 0 ; y_{\text{Max}} = 38.$$

On fait disparaître la ligne d'édition par **Ctrl + G**.



C'est le tableau de valeurs précédent auquel on ajoute une 3^{ème} colonne « nombre dérivé ».

1.10 1.11 1.12 1.13 RAD AUTO RÉEL

6. Faire un tableau dans lequel la première colonne représente les jours, la seconde les valeurs de l'action, la troisième le nombre dérivé. Arrondir à 10^{-2} près.

Réponse ⌵

C'est le tableau de valeurs auquel on ajoute une 3^{ème} colonne "nb dérivé".

C'est le but du problème, avoir une bonne raison de procéder avec une règle fixe et raisonnée sur des valeurs en fluctuation.

1.12 1.13 1.14 1.15 RAD AUTO RÉEL

En quatrième colonne on veut afficher le conseil proposé par la règle :

- * si $p \geq 1,6$ "Acheter"
- * si $p \leq -0,8$ "Vendre"
- * sinon "Pas de proposition".

1.13 1.14 1.15 1.16 RAD AUTO RÉEL

Question

7. Quelle formule faut-il entrer en D1, à recopier vers le bas, pour afficher le conseil proposé par la règle donnée?

Réponse ▼

Attention à la syntaxe, ce n'est pas « si(...) » qu'il faut employer, même quand on travaille en français.

Formule à recopier vers le bas :

=when(c1≥1.6,"acheter",when(c1≤-.8,"vendre","Pas de prop.")).

De même, ce ne sont pas les séparateurs habituels (des autres tableurs) « ; » mais « , » qu'il faut utiliser.

Pour taper ≤ ou ≥, on peut recourir au catalogue des symboles ou au clavier de la calculatrice (ctrl + < ou ctrl + >) ou, plus simplement, écrire <= ou >=, comme dans d'autres logiciels de calcul formel.

L'ouverture de guillemets (comme l'ouverture d'accolades ou de crochets) ouvre une zone entourée de guillemets (d'accolades ou de crochets).

1.14 1.15 1.16 1.17 RAD AUTO RÉEL

	A	B	C	D
		=seq(x,x,1=f(a[])	=ff(a[])	
1	1	16.7	2.38	acheter
2	2	18.8	1.82	acheter
3	3	20.3	1.3	Pas de p...
4	4	21.4	0.824	Pas de p...
5	5	22.	0.4	Pas de p...
D1	=when(c1≥1.6,"acheter",when(c1≤-.8,"ve			

4. Remarques

- Les boursiers ont de nombreuses règles qu'ils utilisent ensemble ou séparément, **après réflexion**.
- S'il était aussi simple que d'utiliser cette petite règle pour faire un « bon coup » en bourse, tout le monde serait riche !
- La règle de choix d'achat ou vente proposée ici étant facilement transportable sur informatique, certains l'ont mise dans un programme automatique d'achat et de vente par internet. Tous les ordinateurs ayant le même programme voulaient acheter ou vendre en même temps, ce qui provoqua un mini crack boursier !

5. Petit prolongement

Il est possible d'indiquer aux élèves comment fut déterminée la fonction préparée pour cet exercice :

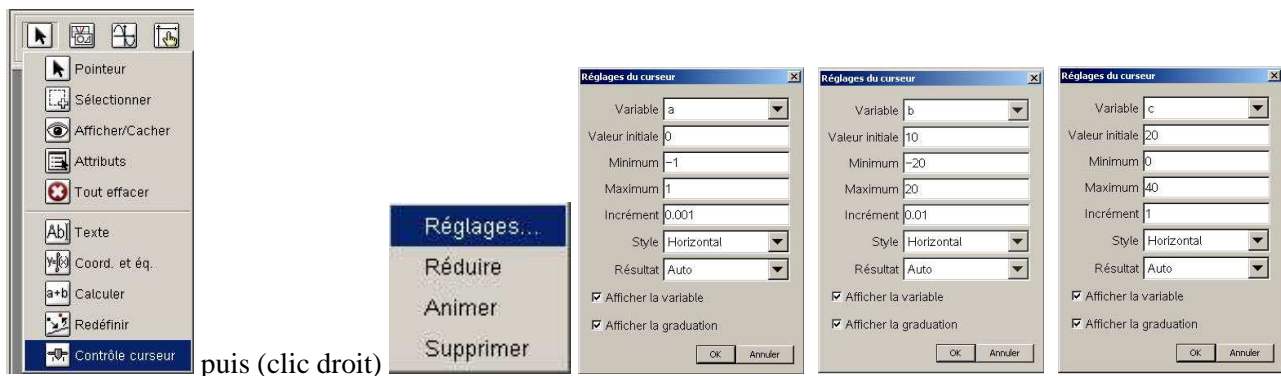
Partant de $f(x) = a(x-b)^3 + c$ on fait varier a , b et c jusqu'à trouver une courbe qui nous convienne, tout en « prévoyant » l'action engendrée par la variation de l'un des paramètres en fonction de sa place dans la fonction.

On le réalise avec des curseurs permettant de faire varier rapidement chacun des paramètres (la description ci-dessous n'est valable que pour une version minimale 1.4 du logiciel).

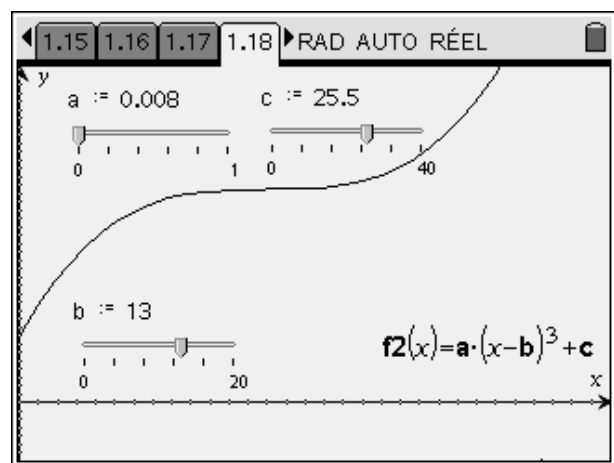
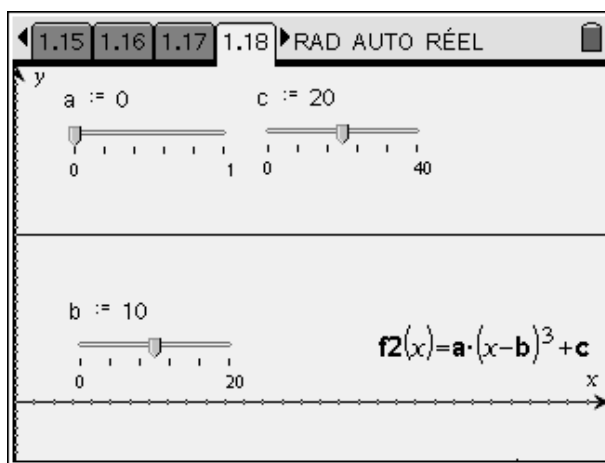
Dans une page « Graphiques & géométrie », définir la fenêtre d'affichage aux valeurs $x_{\min} = 0$, $x_{\max} = 31$ et $y_{\min} = -5$, $y_{\max} = 40$.

Cliquer sur l'icône **Actions**, choisir **A. Contrôle curseur**.

On répétera l'opération pour les trois paramètres.



Définir la fonction, puis faire varier les curseurs. Il est possible d'écrire la valeur du paramètre directement dans le cadre du curseur une fois trouvé une valeur satisfaisante.



Remarque :

$$0,008(x - 13)^3 + 25,5 = 0,008x^3 - 0,312x^2 + 4,056x + 7,924.$$

On a retouché la fonction écrite sous la forme $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ pour que la courbe et le tableau de valeurs conviennent (faire « diminuer » davantage la valeur de la fonction après le maximum relatif, puis diminuer les valeurs de la fonction en fin d'intervalle pour qu'elle reste dans le cadre fixé).

Ce qui donne $f(x) = 0,008x^3 - 0,32x^2 + 3x + 14$.

