EP 026 - 2007 : Barycentre

Auteur du corrigé : Alain Soléan **TI-Nspire™ CAS**

***Avertissement** : ce document a été réalisé avec la version 1.4 ; il est disponible dans sa version la plus récente sur notre site http://education.ti.com/france, menu Ressources pédagogiques.*

Fichier associé : EP026_2007_Barycentre_CAS.tns

1. Le sujet

Sujet 026 de l'épreuve pratique 2007 – Barycentre

Enoncé

On considère A, B et C trois point du plan et k un réel de l'intervalle [–1 ; 1].

On note G_k le barycentre du système de points pondérés :

$$\{ (A, k^2 + 1) ; (B, k) ; (C, -k) \}$$

Le but de cet exercice est de déterminer le lieu des points G_k lorsque k décrit l'intervalle [–1 ; 1].

1. Visualisation à l'aide d'un logiciel de géométrie :

a) Construire les points A, B, C, G_1 et G_{-1}.

b) Construire le point G_k puis visualiser l'ensemble des points G_k lorsque k décrit [–1 ; 1].

c) Quelle est la nature de l'ensemble précédent ?

2. Justification mathématique :

a) Justifier, pour tout réel k de [–1 ; 1], l'existence du point G_k.

b) Démontrer que, pour tout réel k de l'intervalle [–1 ; 1], on a :

$$\overrightarrow{AG_k} = \frac{-k}{k^2+1}\overrightarrow{BC}\,.$$

c) Démontrer la conjecture faite avec le logiciel.

On pourra utiliser les variations de la fonction f, définie sur [–1 ; 1], *par :* $f(x) = \frac{-x}{x^2+1}$.

Production attendue

- Réponses écrites aux questions **1.c**, **2.a** et **b** ;
- Obtention à l'écran de la figure demandée à la question **1**.

Compétences évaluées

- **Compétences TICE**
  - Utilisation d'un logiciel de géométrie pour visualiser un lieu de points.

- **Compétences mathématiques**
  - Barycentre d'un système de point pondérés ;
  - Etude de fonction.

2. Corrigé

Le logiciel ne permet pas de construire un barycentre mais nous savons que si G est le barycentre du système $\{ (A, a) ; (B, b) ; (C, c) \}$ on a, pour tout point M, $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{a+b+c}(a\overrightarrow{MA} + b\,\overrightarrow{MB} + c\,\overrightarrow{MC})$

ou encore $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{a+b+c}(b\ \overrightarrow{AB} + c\ \overrightarrow{AC})$ (*Relation* 1).

Dans notre cas, le point G_k existe pour tout réel k de l'intervalle [–1 ; 1] puisque $k^2 + 1 + k + (-k) \neq 0$.
La *relation* 1 peut alors s'écrire :

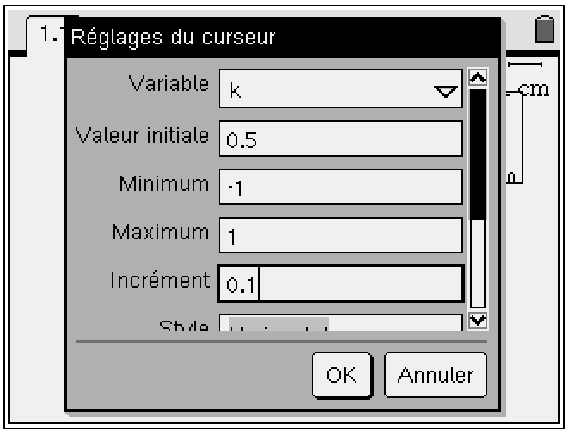
$$\overrightarrow{AG_k} = \frac{1}{k^2+1}(\ k\overrightarrow{AB} - k\overrightarrow{AC}) \text{ soit encore } \overrightarrow{AG_k} = \frac{-k}{k^2+1}\overrightarrow{BC} \ \ (\textit{Relation } 2).$$

On se propose de construire le lieu des points G_k lorsque k décrit l'intervalle [–1 ; 1].

Ouvrir une page **Graphiques et géométrie.**

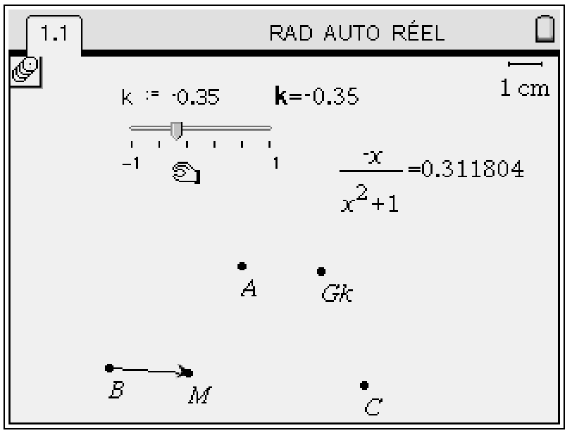
• Création du nombre variable $\frac{-\mathrm{k}}{\mathrm{k}^2+1}$

Afficher le **Plan géométrique** , puis choisir **Contrôle curseur**,le nommer k enfin effectuer les réglages du curseur comme indiqué ci contre :



Créer un **Texte** contenant un nombre quelconque dans l'intervalle [–1 ;1] et le **stocker dans la Variable** k..

Créer le **Texte** $\frac{-\mathrm{x}}{\mathrm{x}^2+1}$, puis, avec l'outil **Calculer**, en associant à x la variable k.. Ainsi en déplaçant manuellement le curseur , le nombre $\frac{-\mathrm{k}}{\mathrm{k}^2+1}$ variera.



• Construction de G_k

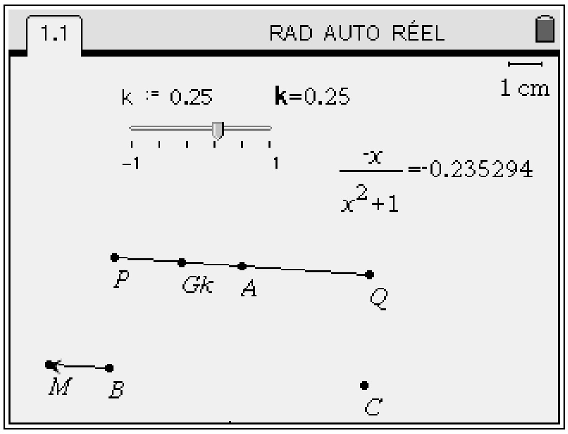
Placer et nommer les **Points** A, B et C.

Créer le point M, image de C par l'**Homothétie** de centre B et de rapport $\frac{-k}{k^2+1}$, puis le **Vecteur** $\overrightarrow{BM}$ (qui est donc égal à $\frac{-k}{k^2+1}\overrightarrow{BC}$).

Créer enfin l'image de A par la **Translation** de vecteur $\overrightarrow{BM}$ (c'est le point G_k).

Observer son déplacement et déplaçant le curseur k et demander l'affichage de la **Trace géométrique** du point G_k.

Observer les positions des points $P = G_1$ et $Q = G_{-1}$ obtenus pour $k = 1$ et $k = -1$ on a $\overrightarrow{AP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

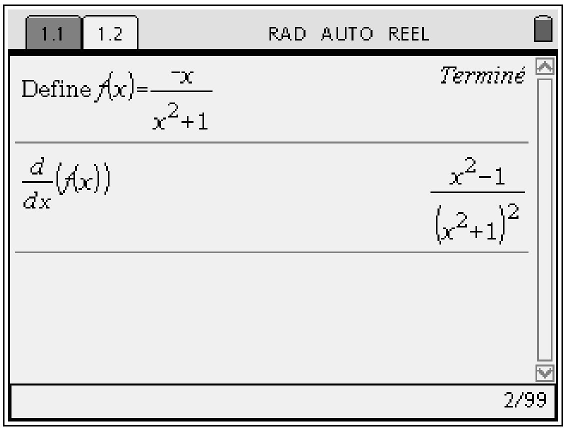


On peut conjecturer que le lieu des points G_k est un segment de droite parallèle à (BC), segment limité par P et Q vérifiant $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{BC}$ avec A milieu de [PQ].

2) Les réponses aux questions **2.a** et **2.b** ont été fournies avant la construction des points G_k .

c) La *relation* 2 fournit la justification du parallélisme de (AG_k) et (BC).
Montrons que P et Q vérifient bien les conditions conjecturées.

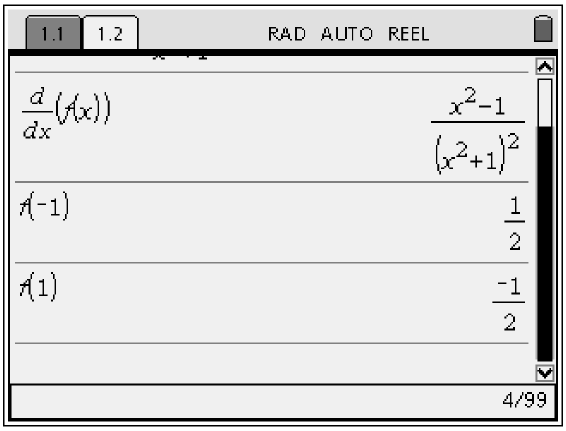
Etudions pour cela la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{-x}{x^2+1}$.

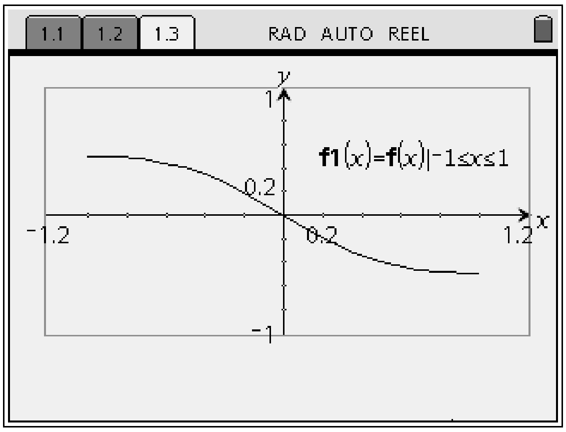


Ouvrir une page **Calculs**.
Définir la fonction f.
Demander sa dérivée.
On vérifie que, lorsque $x \in [-1 ; 1]$, $f'(x) \leq 0$.
Donc f est décroissante sur $[-1 ; 1]$.
En outre, $f(-1) = \dfrac{1}{2}$ et $f(1) = -\dfrac{1}{2}$.

Donc on a bien, d'une part :
$\overrightarrow{AG_{-1}} = \overrightarrow{AQ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AG_1} = \overrightarrow{AP} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$,
et d'autre part, comme pour $k \in [-1 ; 1]$
$-\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{-k}{k^2+1} \leq \dfrac{1}{2}$, $G_k \in [PQ]$.

En ouvrant une page **Graphiques et géométrie**, on peut vérifier graphiquement les résultats précédents (écran ci-dessous à droite)





3. Pour aller plus loin

La *relation* 1 vérifiée par G permet de le construire pour tous réels a, b et c (avec $a + b + c \neq 0$) en créant des curseurs définissant a, b et c. Ainsi on peut voir évoluer le point G suivant les valeurs des coefficients.

Tous les écrans de ce document sont obtenus à partir de la calculatrice.