EP 021 - 2007 : Méthode d'Euler

Auteur du corrigé : Alain Soléan **TI-Nspire™ /TI-Nspire™ CAS**

Avertissement *: ce document a été réalisé avec la version 1.4 ; il est disponible dans sa version la plus récente sur notre site* http://education.ti.com/france*, menu Ressources pédagogiques.*

Fichier associé : EP021_2007_Euler.tns

1. Le sujet

Sujet 021 de l'épreuve pratique 2007 – Equation différentielle et méthode d'Euler

Enoncé

Soit l'équation différentielle $y' = -2y$. On admet que la fonction f solution de cette équation, définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $f(0) = 1$ est la fonction f telle que $f(x) = \exp(-2x)$.

On cherche à comparer $f(1)$ aux valeurs approchées obtenues en utilisant la méthode d'Euler avec différents pas.

On se place sur l'intervalle [0 ; 1] en prenant un pas h égal à $\frac{1}{n}$, où n est un entier supérieur à 2. On obtient ainsi, dans le plan muni d'un repère, une suite de points notés M_k, d'abscisse x_k et d'ordonnée y_k telles que :

$x_0 = 0$, $y_0 = 1$, et pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n-1$, $x_{k+1} = x_k + \frac{1}{n}$ et $y_{k+1} = \left(1 - \frac{2}{n}\right) y_k$.

Pour tout entier k compris entre 0 et n, y_k est une valeur approchée de $f(x_k)$.

1. Déterminer l'expression de y_k en fonction de k (n étant une valeur donnée).

2. À l'aide d'un tableur, reproduire à l'écran et compléter le tableau suivant :

Valeur de n égale à	k	x_k	y_k
10	0	0	1
Pas égal à	1	0,1	0,8
0,1	2	0,2	
	3		
	4		
	5		
	6		
	7		
	8		
	9		
	10		

3. En déduire une valeur approchée de $f(1)$.

4. Réitérer la méthode dans les cas $n = 20$ puis $n = 30$ et donner les valeurs approchées de $f(1)$ ainsi obtenues. Sur la copie, recopier et compléter le tableau suivant :

Valeur de n égale à	10	20	30	Valeur approchée de e^{-2}
Valeur approchée de y_n				

À l'aide du tableur, représenter graphiquement dans un repère du plan la suite de points M_k obtenue à la question 4.,dans le cas où n est égal à 30, ainsi que la fonction solution.

© Texas Instruments 2008 / Photocopie autorisée

Production demandée

- Calcul de y_k en fonction de k ;
- La réalisation et visualisation à l'écran de tableaux de valeurs obtenus à l'aide d'un tableur ;
- Détermination de valeurs approchées de $f(1)$ (tableau rempli) ;
- Visualisation à l'écran et si possible impression de la représentation graphique.

Compétences évaluées

- **Compétences TICE**
  - Utiliser un tableur, notamment ses fonctions graphiques ;
  - Réaliser une feuille de calcul adaptée à la situation.
- **Compétences mathématiques**
  - Mettre en œuvre les connaissances sur la méthode d'Euler ;
  - Déterminer la primitive d'une fonction, avec condition initiale ;
  - Faire le lien entre la fonction approchée obtenue par la méthode d'Euler et la primitive : évaluer une précision.

2. Corrigé

1) La suite des valeurs y_k est (pour n fixé) une suite géométrique de premier terme $y_0 = 1$ et de raison $b = 1 - \frac{2}{n}$, donc on a $y_k = (1 - \frac{2}{n})^k$

Cette formule pourra être démontrée par récurence.

2) Ouvrir une page **Tableurs & listes**.

Dans la cellule **A1** inscrire " n = " (les guillemets de fin sont placés automatiquement)

Dans la cellule **A2** placer 10 (mettre un point si on veut obtenir des valeurs approchées)

Dans la cellule **A3** inscrire " pas = "

Dans la cellule **A4** inscrire la formule = **1/A2**

Dans la cellule grisée de la colonne **B** avec **Menu Données - Générer une suite** générer la suite

= **seqn(n,{0},11,11)**

Dans la cellule **C1** placer 0. Dans la cellule **C2** inscrire la formule **= C1 + A$4**

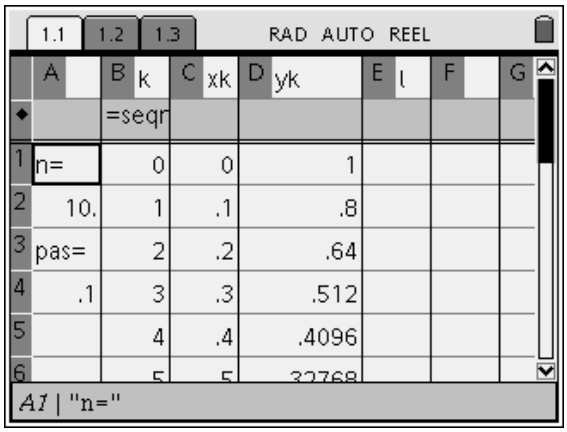
Copier cette cellule, sélectionner les cellules de **C3** à **C11** et coller la formule. (on obtient la suite des x_k).

Dans la cellule **D1** placer 1.Dans la cellule **D2** inscrire la formule : **= D1*(1 –2* A$4)**

Copier cette cellule, sélectionner les cellules de **D3** à **D11** et coller la formule. (on obtient la suite des y_k).

On nommera les colonnes **B**, **C** et **D** respectivement k, x_k ,et y_k (en « tête de liste »).

On peut élargir la colonne **D** pour avoir plus de décimales.



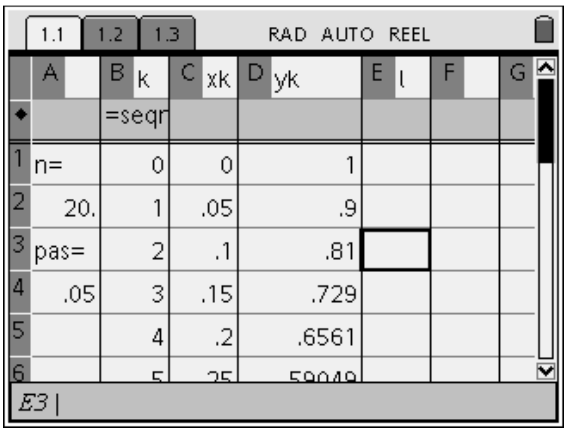
L'écran ci-dessus est obtenu à partir de la calculatrice.

3) $x_{11} = 1$ donc y_{11} est une valeur approchée de $f(1)$ $y_{11} \approx 0{,}107$

4) Pour obtenir le tableau lorsque $n = 20$ il suffit de placer 20 dans **A2**, puis remplacer 11, par 21 dans la colonne **B**, enfin de coller les formules inscrites en **C2** et **D2** sur les plages **C3** à **C21** et **D3** à **D21**

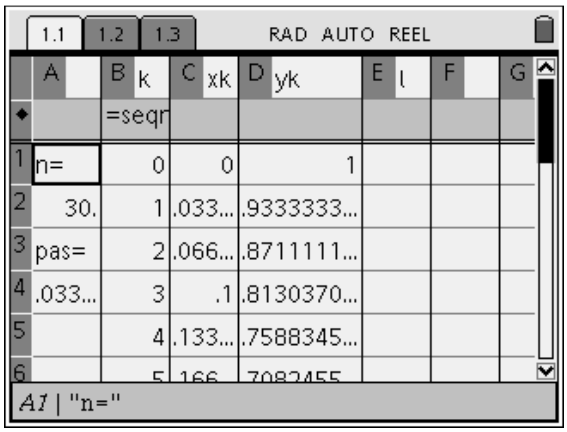
© Texas Instruments 2008 / Photocopie autorisée

Procéder de manière analogue pou le tableau lorsque $n = 30$



	A	B k	C xk	D yk	E	F	G
◆		=seqn					
1	n=	0	0	1			
2	20.	1	.05	.9			
3	pas=	2	.1	.81			
4	.05	3	.15	.729			
5		4	.2	.6561			
6		5	.25	.59049			

E3 |



	A	B k	C xk	D yk	E	F	G
◆		=seqn					
1	n=	0	0	1			
2	30.	1	.033...	.9333333...			
3	pas=	2	.066...	.8711111...			
4	.033...	3	.1	.8130370...			
5		4	.133...	.7588345...			
6		5	.166	.7082455			

A1 | "n="

Valeur de n égale à	10	20	30	Valeur approchée de e^{-2}
Valeur approchée de y_n	0,107	0,122	0,126	0,135

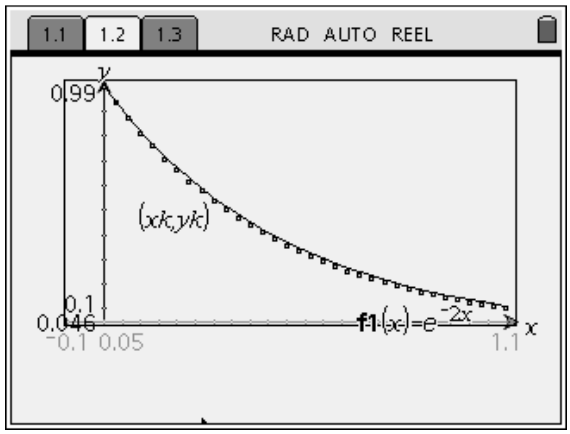
5) Pour obtenir le graphique ouvrir une page **Graphiques et géométrie**

Avec **Type de graphiques**, choisir **Nuage de points**

Affecter à x la variable x_k et à y la variable y_k

Puis avec **Fenêtre** faire **Zoom – Stat**

Demander aussi le tracé de la Fonction f_1 avec $f_1(x) = e^{-2x}$

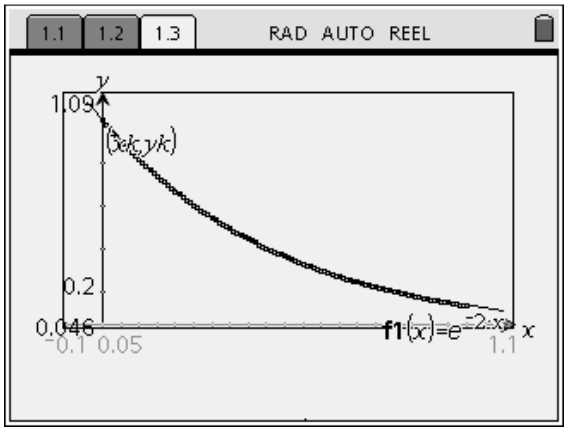


3. Pour aller plus loin

On peut essayer de plus grandes valeurs de n
Pour $n = 60$, $f(1) \approx 0{,}131$

Pour $n = 100$, $f(1) \approx 0{,}133$

Ci-contre le nuage de point et la courbe de la fonction f_1 pour $n = 100$.



© Texas Instruments 2008 / Photocopie autorisée