Nom .... Classe ....

S3 – SUITES INSTABLES

TI-82 Stats – TI-83 Plus – TI-84 Plus

Exemple 1

Soit la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = k \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$ avec $k = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

1) Démontrer par récurrence que, pour tout entier n, $u_n = k^n$. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

2) La suite (u_n) peut donc se définir de 2 manières différentes :

1ère manière : $\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = k \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$; 2nde manière : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = ku_n \end{cases}$.

a) En utilisant le mode **Suit** (pour Suite) ou **SEQ** (pour Sequence) de la calculatrice (voir l'**annexe** en fin de document), remplir la table de valeurs suivante, en prenant l'une puis l'autre définition de la suite :

rang n	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
u_n 1re définition										
u_n 2de définition										

b) Qu'observe-t-on ?

3) Explication : On pose $k' = k + \varepsilon$ (ε est "epsilon", lettre de l'alphabet grec).

a) Soit la suite (v_n) définie par : $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = k'v_n \end{cases}$. Pour quelles valeurs de ε la suite (v_n) converge ?

b) Soit la suite (w_n) définie par : $\begin{cases} w_0 = 1, w_1 = k' \\ w_{n+2} = w_{n+1} + w_n \end{cases}$.

Démontrer par récurrence que, pour tout n entier : $w_n = \left(1 - \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{5}}\right)\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

En déduire que la suite (w_n) converge lorsque $\varepsilon = 0$, mais diverge dès que $\varepsilon \neq 0$.

c) Donner une explication au phénomène observé à la 2ème question.

Exemple 2

1) Soit la suite (I_n) définie par : $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{5-t}\,dt$.

a) Calculer I_0.

b) Démontrer que, pour tout entier n : $0 \le I_n \le \dfrac{1}{4(n+1)}$. En déduire la limite de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

c) Démontrer que, pour tout nombre réel $t \neq 5$, $\dfrac{t^{n+1}}{5-t} = -t^n + 5\dfrac{t^n}{5-t}$, puis prouver que, pour tout entier naturel n, $I_{n+1} = 5\,I_n - \dfrac{1}{n+1}$.

2) En utilisant les résultats précédents, calculer les termes de rang 15 à 30 de la suite (I_n).
Qu'observe-t-on ?

3) Explication : Soit la suite (u_n) de 1er terme u_0 et de terme général $u_n = I_n + 5^n\left(u_0 - \ln\dfrac{5}{4}\right)$.

a) Étudier la limite de la suite (u_n) suivant les valeurs de u_0.

b) Démontrer que, pour tout entier n, $u_{n+1} = 5\,u_n - \dfrac{1}{n+1}$.

c) En déduire une explication du phénomène observé à la 2ème question.

Exemple 3 :

Soit la suite (I_n) définie par : $I_n = \int_1^e x^2 (\ln x)^n \, dx$.

1) a) Calculer I_0.

b) Démontrer que la suite (I_n) est positive et décroissante. Que peut-on en déduire ?

2) On souhaite vérifier ces résultats à l'aide de la calculatrice.

On admet que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \dfrac{e^3}{3} - \dfrac{n}{3} I_{n-1}$.

Avec le **mode** **Suit** de la calculatrice, calculer les termes successifs de cette suite pour vérifier les résultats précédents, puis chercher la limite de la suite. Qu'observe-t-on ?

ANNEXE

OBTENIR UN TABLEAU DE VALEURS D'UNE SUITE
Utilisation du MODE SEQUENCE de la calculatrice

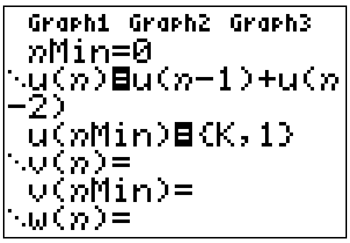
- Dans **mode** sélectionner **Suit** (en anglais : **SEQ**).

- Dans *f(x)* (ou Y= (*écran* 1),
  ***n*Min** = indice du terme initial
  ***u*(*n*)** = terme général
  ***u*(*n*Min)** = valeur du terme initial (pour une suite définie par récurrence seulement).

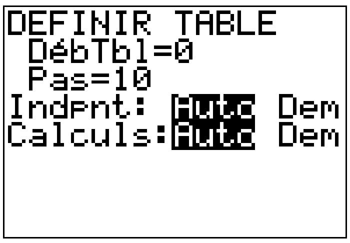
N.B.
- $u(n)$ est défini en fonction de n, de $u(n-1)$, ou de $u(n-1)$ et $u(n-2)$
- Dans le cas d'une suite récurrente double, il y a 2 termes initiaux, $u(n\text{Min})$ est alors la liste de ces valeurs initiales sous la forme $\{u_1, u_0\}$, **dans cet ordre**.
- Pour taper n : *x,t,θ,n*. Pour taper u ou v : 2nde 7 ou 2nde 8.

- Dans 2nde fenêtre, soit [déf table] ou [TBLSET] indiquer le rang du 1er terme que l'on veut calculer (qui n'est pas forcément le terme initial de la suite), puis le pas avec lequel on veut lire les résultats (il doit être entier). On vérifiera que le mode **Auto** est sélectionné (*écran* 2).

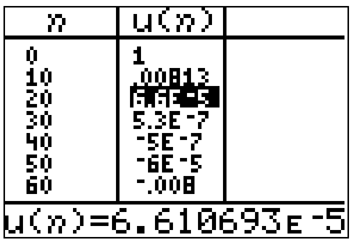
- Appuyer sur 2nde graphe, soit [table] pour obtenir la table de valeurs des termes de la suite (*écran* 3).
  Flèche vers le bas pour obtenir les termes suivants de la suite.
  Flèche vers la droite pour mettre le curseur sur une valeur de la suite et obtenir en bas de l'écran une meilleure approximation.



écran 1



écran 2



écran 3

N.B. : Dans l'*écran* 1, la valeur de $u(1)$ a été stockée préalablement dans la variable K.