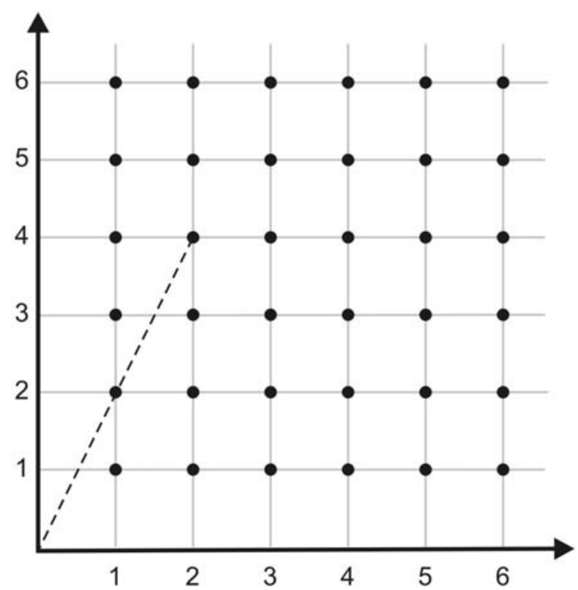
Nombre: ______________________________ Fecha: ________________

Actividad *NUMB3RS*: El problema de la arboleda

Cuando el programa de reconocimiento facial de Charlie no concuerda con su búsqueda de un agente renegado de la CIA, recuerda el problema de la arboleda de Euclides. “Siempre me salían cero concordancias. Entonces recordé el ejemplo clásico de la arboleda de Euclides. Al mirar una arboleda desde el cielo, vemos todos los árboles que la componen. En cambio, si estamos de pie en tierra, la vista es muy diferente. Unos árboles obstaculizan la vista de otros”. Esta actividad explora ideas relacionadas con el problema de la arboleda.

Imagina que un punto representa un árbol. Planta un árbol en cada uno de los 36 puntos con coordenadas que sean números enteros dentro de la arboleda cuadrada con esquinas (1, 1), (6, 1), (6, 6) y (1, 6). Un punto con coordenadas de números enteros se denomina un **punto de retícula**. Ahora imagina que eres un observador situado en un punto de retícula afuera de la arboleda. ¿Qué árboles ves? Supón que tu línea visual es el segmento que te une a un árbol.



1. Supón que estás situado en (0, 0).¿Qué árboles (puntos de retícula) en esta arboleda con $1 \le x \le 6$ y $1 \le y \le 6$ **no te es posible** ver? Por ejemplo, no ves el árbol en (2, 4) porque está obstruido por el árbol en (1, 2).

Más formalmente, dos puntos de retícula (*a, b*) y (*c*, *d*) son **mutuamente visibles** si el segmento de recta que los une no contiene más puntos de retícula.

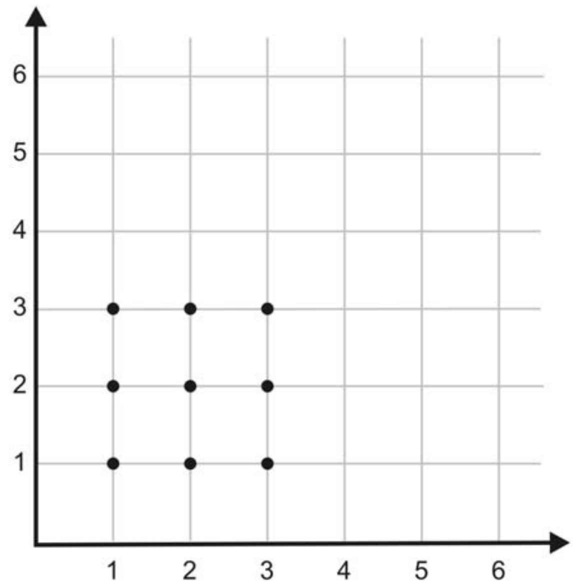
Tom Butts, UTDallas, Richardson, TX

2. ¿Bajo qué condición en *a* y *b* **no** será visible el punto (*a*, *b*) desde el origen?

3. ¿Qué puntos de retícula en esta plantilla con $1 \le x \le 6$ y $1 \le y \le 6$ **no** son visibles desde el punto externo (2, 0)?

4. ¿Bajo qué condición en *a* y *b* no será visible el punto (*a*, *b*) desde el punto (2, 0)? **Pista:** Una estrategia es examinar la curva del segmento que une (2, 0) y (*a*, *b*).

Así como Charlie limitó su búsqueda a agentes que tenían acceso a sólo algunos archivos, limita tu búsqueda a una arboleda más pequeña donde los árboles estén sembrados en puntos de retícula con $1 \le x \le 3$ y $1 \le y \le 3$. ¿Hay un punto de retícula afuera de esta arboleda más pequeña donde podrías situarte y ver todos los árboles?

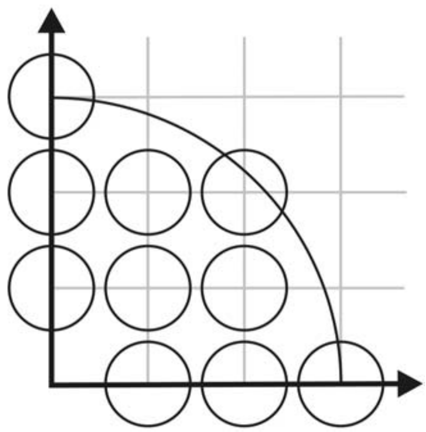


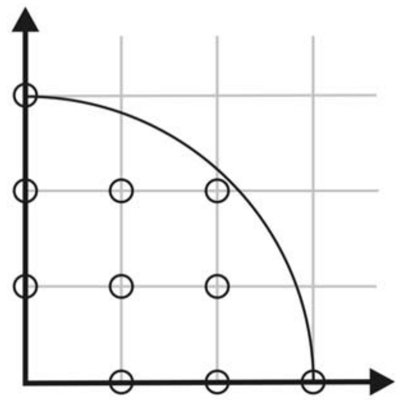
5. **a.** Explica por qué (6, 4) es un punto así. Es decir, ¿por qué son visibles desde (6, 4) todos los puntos de retícula en la plantilla con $1 \le x \le 3$ y $1 \le y \le 3$?

b. Halla otro punto desde el cual sean visibles todos los puntos de retícula en esta plantilla.

En el problema de la arboleda de Euclides, los árboles, que están representados como cilindros verticales idénticos con el mismo radio, están plantados en cada punto de retícula dentro de una arboleda circular con su centro en (0, 0), donde se sitúa el observador. Las líneas visuales son semirrectas que contienen el origen.

Tom Butts, UTDallas, Richardson, TX

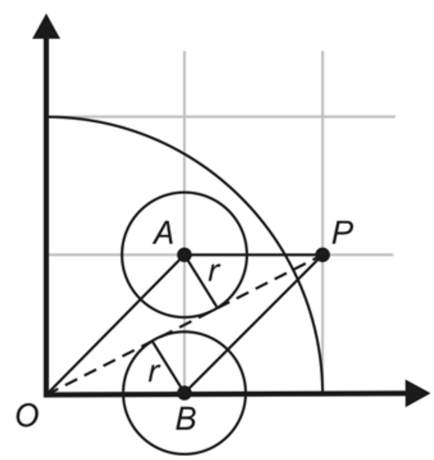




En las dos arboledas con radio R = 3 que ves arriba, es claro que un observador parado en el origen no puede ver afuera de la arboleda a la izquierda, pero sí ve fácilmente hacia afuera por la derecha.

Dado el radio de la arboleda, R, el problema es determinar el valor mínimo del radio, r, de cada árbol que le impida al observador ver afuera de la arboleda en dirección alguna. Para mayor sencillez, sólo se considera la parte de la arboleda en el primer cuadrante.

Suponiendo que el observador no puede ver hacia afuera si su línea visual es tangencial a un árbol, entonces esta figura muestra r cuando R = 2.



6. Encuentra el valor mínimo posible del radio r para estos dos árboles en la arboleda con R = 2. (**Pista:** Examina el área de *OAPB* de dos modos. ¿Por qué es suficiente considerar solamente esta línea visual?)

7. Encuentra el valor análogo de r para dos árboles así, en arboledas de radio 3 y 4. Explica tu estrategia. Conviene trazar un diagrama.

8. Haz una conjetura sobre la relación general entre el valor mínimo posible de r, el radio de los árboles y R, el radio de la arboleda donde el observador no puede ver para afuera en ninguna dirección.

Tom Butts, UTDallas, Richardson, TX

El objeto de esta actividad es dar a los estudiantes un vistazo breve y sencillo de un tema matemático muy extenso. TI y NCTM lo invitan a usted y a sus estudiantes a aprender más sobre este tema con las extensiones que se ofrecen abajo y con su propia investigación independiente.

Extensiones

Para el estudiante

1. Demuestra que todos los árboles en una arboleda cuadrada de esquinas (1, 1), (s, 1), (s, s) y (1, s) son visibles para un observador situado en (s^2, s + 1).

2. Examina los siguientes sitios Web y descubre la relación entre puntos de retícula visibles desde el origen y las secuencias o series de Farey:
http://mathworld.wolfram.com/FareySequence.html
http://www.cut-the-knot.org/ctk/PickToFarey.shtml

3. Mira “Euclid’s Orchard” en el siguiente sitio Web. Ensaya el applet y examina la arboleda en todas las posiciones. George Polya y Gabor Szego plantearon el problema por primera vez en el decenio de 1920.
http://mathworld.wolfram.com/EuclidsArboleda.html

Problema relacionado

Charlie se valió de una analogía entre el problema de la arboleda de Euclides y la dificultad en su problema de reconocimiento facial. Como escribe Polya en *Induction and Analogy in Mathematics,* “una analogía es un tipo de similitud. ...considérese la mano de un hombre, la pata de un gato, la pata delantera de un caballo, la aleta de una ballena, etc.” La estrategia de “usar un problema análogo más simple” para resolver problemas es sumamente útil. Sirve, por ejemplo, para considerar relaciones análogas entre figuras bidimensionales y tridimensionales.

- ¿Cómo localizas el centro de un tetraedro? ¿Cuál es un problema análogo en dos dimensiones?

- Formula un teorema análogo al teorema de Pitágoras en tres dimensiones. Una posibilidad para investigar es el teorema de DeGua.

Tom Butts, UTDallas, Richardson, TX