Autor: Jorge Santos

Estudo da concavidade do gráfico de uma função

1. Descrição

Com esta tarefa, pretende ilustrar-se geometricamente o conceito do sentido de concavidade do gráfico de uma função quadrática num intervalo I comparando os declives de duas retas definidas por quaisquer três pontos P, Q e R do gráfico de abcissas distintas pertencentes ao intervalo.

Também se pretende ilustrar geometricamente o mesmo conceito num dado intervalo I, comparando a posição de um segmento de reta definida por quaisquer dois pontos P e Q do gráfico, de abcissas em I, com a parte do gráfico de f de abcissas estritamente situadas entre as abcissas de P e Q.

Conclui-se a tarefa reconhecendo o sentido da concavidade do gráfico de uma função quadrática, definida pela expressão $f(x) = ax^2$, a não nulo, em função do sinal do coeficiente a.

Ficheiros: estudo_concavidade.tns

2. Metas Curriculares

Funções Reais de Variável Real 10 – FRVR10

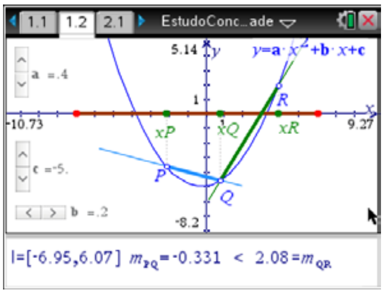
4.6. Identificar, dada uma função real de variável real f, o gráfico de f como «tendo concavidade (estritamente) voltada para cima» (respetivamente como «tendo concavidade (estritamente) voltada para baixo») num dado intervalo $I \subset D_f$ se dados quaisquer três pontos P, Q e R do gráfico, de abcissa em I tais que $x_P < x_Q < x_R$, o declive da reta PQ é inferior (respetivamente superior) ao da reta QR.

4.7. Saber que uma função real de variável real tem a concavidade (estritamente) voltada para cima (respetivamente para baixo) num dado intervalo $I \subset D_f$ se e somente se dados quaisquer dois pontos P e Q do gráfico, de abcissas em I, a parte do gráfico de f de abcissas estritamente situadas entre as abcissas de P e Q ficar "abaixo" (respetivamente "acima") do segmento de reta $[PQ]$.

4.8. +Reconhecer, dado um número real não nulo a, que o gráfico da função f definida pela expressão $f(x) = ax^2$ tem, em $]-\infty, +\infty[$, a concavidade voltada para cima se $a > 0$ e voltada para baixo se $a < 0$.

4. Guia de utilização e de exploração

FICHA 01 - Descritor (FRVR10-4.6 e 4.8) - Página 1.2



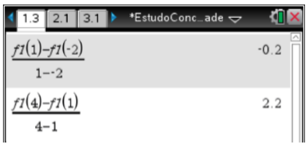
Os seletores a, b e c permitem alterar os parâmetros que definem a função quadrática de equação $f1(x) = ax^2 + bx + c$.

Para definir o intervalo I onde se pretende estudar o sentido de concavidade, deverá mover os pontos extremidade do segmento de reta vermelho.

Para quaisquer três abcissas x_P, x_Q e x_R, tais que $x_P < x_Q < x_R$, são representadas as retas PQ, QR e comparados os respetivos declives. Poderá mover diretamente os pontos verde para definir as abcissas dos pontos P, Q e R.

Exercício 1

Exercício 1.1



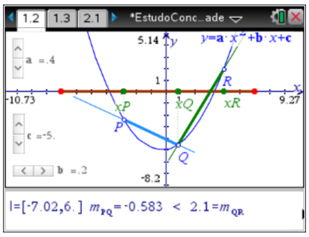
Em primeiro lugar, deve ajustar o valor dos seletores a,b e c para os valores

$a = 0.4$, $b = 0.2$ e $c = -5$.

Para determinar o valor dos declives das retas PQ e QR vamos criar uma nova página (1.3) e selecionar a aplicação "Calculadora".

Insira uma nova página premindo as teclas: ctrl doc▾ 1 e determine os declives das retas PQ e QR. A função quadrática está definida na variável f1.

Exercício 1.2



Nesta atividade, após mover os pontos vermelhos para aproximar o intervalo I, poderá mover os pontos verdes de abcissas em I tais que $x_P < x_Q < x_R$ e observar que o declive da reta PQ é sempre inferior ao declive da reta QR.

Exercício 1.3

Verifica-se que o sentido de concavidade do gráfico da função f1 no intervalo I está voltado para cima e que o declive da reta PQ é sempre inferior ao declive da reta QR.

Exercício 1.4

Verifica-se que, independentemente do intervalo I escolhido (movendo os pontos vermelhos), os pontos P, Q e R de abcissas em I tais que $x_P < x_Q < x_R$, definem duas retas em que o declive de PQ é sempre inferior ao declive de QR e que o sentido de concavidade do gráfico da função f1 está voltado para cima.

Conjetura-se que o sentido de concavidade do gráfico da função f1 está voltado para cima.

Exercício 2

Exercício 2.1

Definem-se os parâmetros $a = -0.2$, $b = 0.2$ e $c = -1.8$. Após mover os pontos vermelhos para aproximar o intervalo I, poderá mover os pontos verdes de abcissas em I tais que $x_P < x_Q < x_R$ e observar que o declive da reta PQ é sempre superior ao declive da reta QR.

Exercício 2.2

Verifica-se que o sentido de concavidade do gráfico da função f1 no intervalo I está voltado para baixo e que o declive da reta PQ é sempre superior ao declive da reta QR.

Exercício 2.3

Verifica-se que, independentemente do intervalo I escolhido (movendo os pontos vermelhos), os pontos P, Q e R de abcissas em I tais que $x_P < x_Q < x_R$, definem duas retas em que o declive de PQ é sempre superior ao declive de QR e que o sentido de concavidade do gráfico da função f1 está voltado para baixo.

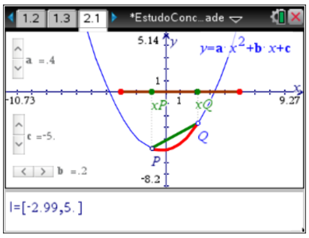
Conjetura-se que o sentido de concavidade do gráfico da função f1 está voltado para baixo.

Exercício 3

Após considerar diferentes valores positivos e negativos para o parâmetro a na classe de funções ax^2 e comparar os respetivos declives das retas PQ e QR definidas por quaisquer três pontos P, Q e R do gráfico da função, podemos concluir o enunciado do descritor FRVR10-4.8:

"Dado um número real não nulo a, que o gráfico da função f definida pela expressão $f(x) = ax^2$ tem, em $]-\infty, +\infty[$, a concavidade voltada para cima se $a > 0$ e voltada para baixo se $a < 0$"

FICHA 02 - Descritor (FRVR10-4.7) - Página 1.3



Novamente, os seletores a, b e c permitem alterar os parâmetros que definem a função quadrática de equação $f1(x) = ax^2 + bx + c$.

Para definir o intervalo I onde se pretende estudar o sentido de concavidade, deverá mover os pontos extremidade do segmento de reta vermelho.

Para quaisquer duas abcissas x_P e x_Q, tais que $x_P < x_Q$, é representada a reta PQ e a parte do gráfico de f de abcissas estritamente situadas entre as abcissas de P e Q.

Exercício 1

Para quaisquer pontos P e Q de abcissa em I, o segmento de reta $[PQ]$ está acima da parte do gráfico de $f1$ de abcissas estritamente situadas entre as abcissas de P e Q.

Exercício 2

Neste caso, para quaisquer pontos P e Q de abcissa em I, o segmento de reta $[PQ]$ está abaixo da parte do gráfico de $f1$ de abcissas estritamente situadas entre as abcissas de P e Q.

Exercício 3

Conjetura-se o enunciado do descritor FRVR10-4.7:

"Uma função real de variável real tem a concavidade (estritamente) voltada para cima (respetivamente para baixo) num dado intervalo $I \subset D_f$ se e somente se dados quaisquer dois pontos P e Q do gráfico, de abcissas em I, a parte do gráfico de f de abcissas estritamente situadas entre as abcissas de P e Q ficar "abaixo" (respetivamente "acima") do segmento de reta $[PQ]$."