EP 044 - 2007 : Somme de termes d'une suite

Auteur du corrigé : Alain Soléan, France et Michel Villiaumey **TI-Nspire™ CAS**

Avertissement *: ce document a été réalisé avec la version 1.4 ; il est disponible dans sa version la plus récente sur notre site http://education.ti.com/france, menu Ressources pédagogiques.*

Fichier associé : EP044_2007_SommeSuite_CAS.tns

1. Le sujet

Sujet 044 de l'épreuve pratique 2007 – Somme de termes d'une suite

Enoncé

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout n entier naturel par $u_n = n^3$ et la somme de ses premiers termes $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \sum_{k=0}^{n} k^3$.

1. Donner la somme V_n des $n + 1$ premiers termes de la suite arithmétique des entiers naturels, soit $V_n = 0 + 1 + \ldots + n$.

2. Avec un tableur ou une calculatrice programmable, calculer la somme de S_n pour n allant de 1 à 30.

3. Avec un tableur ou une calculatrice programmable, calculer la valeur de V_n^2 dans les mêmes cas particuliers. Que constate-t-on ?

4. À partir du constat ci-dessus, conjecturer une formule donnant la valeur de S_n en fonction de n, puis la démontrer. On suggère une démonstration par récurrence.

Production demandée

- Formule donnée sans démonstration exprimant V_n en fonction de n.
- Tableau des valeurs exactes des suites S_n et V_n^2 pour n de 1 à 30 (par exemple en imprimant la feuille de calcul).
- Formule donnant S_n en fonction de n, conjecturée à partir du tableau précédent.
- Démonstration de la formule donnant S_n en fonction de n.

Compétences évaluées

- **Compétences TICE**
  - Mettre en place un processus itératif ;
  - Émettre une conjecture par comparaison de deux listes de nombres.
- **Compétences mathématiques**
  - Somme des termes d'une suite arithmétique ;
  - Démonstration par récurrence d'une formule explicite.

2. Corrigé

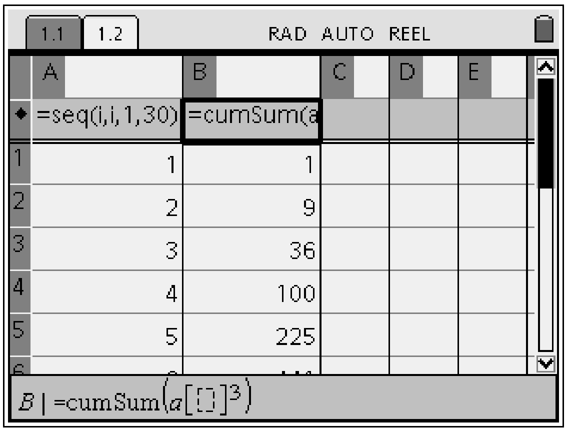
Remarque : on peut remarquer qu'un logiciel de calcul formel (comme TI-Nspire) permet de trouver directement les résultats souhaités. En effet, $\sum_{k=0}^{n} k$ *donne le résultat de la question* **1** *et* $\sum_{k=0}^{n} k^3$ *donne directement :* $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$. *Il n'en demeure pas moins que le candidat est invité à démontrer le second résultat.*

1. D'après le cours, la somme V_n des $n + 1$ premiers termes de la suite arithmétique de premier terme 0 et de raison 1 est :

$$V_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2. Ouvrir une page **Tableur & listes**.

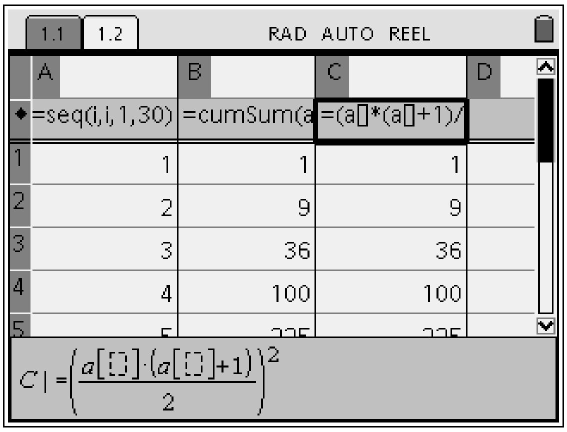
Dans les cases grisées en haut des colonnes inscrire :
Colonne **A** : = seq(k, k,1, 30).
On obtient ainsi la liste des entiers naturels de 1 à 30.
Colonne **B** : = cumSum(a^3).
On obtient ainsi la liste des S_k pour k variant de 1 à 30.



3. Dans la case grisée en haut de la colonne C inscrire :

$$= \left(\frac{\text{a.(a}+1)}{2}\right)^2$$

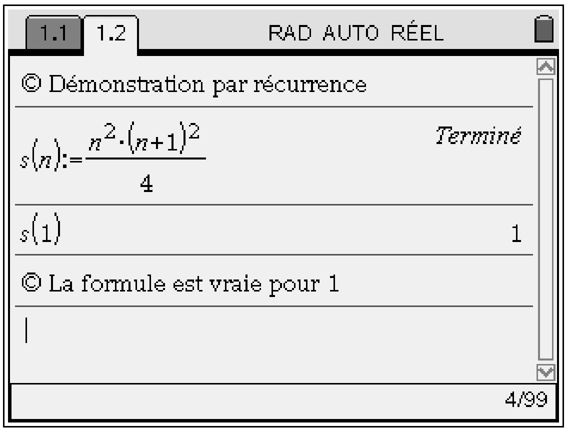
où a représente la colonne A.
On obtient ainsi la liste des $V_k{}^2$ pour k variant de 1 à 30.
On peut constater que, pour tout k variant de 1 à 30, on a : $S_k = V_k{}^2$.

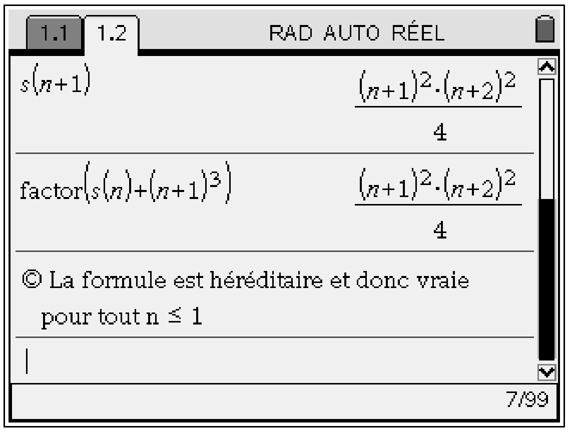


4. D'après le constat précédent, il faut démontrer que pour tout entier naturel n, $S_n = \dfrac{n^2\,(n+1)^2}{4}$.

Procédons par récurrence en remarquant que : $S_{n+1} = S_n + (n+1)^3$.
Ouvrir une page **Calculs**.

Définir $s(n)$. Alors, $s(0)$ vérifie bien la relation à démontrer et on a : $S_n + (n+1)^3 = \dfrac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$, comme le montrent les écrans ci-dessous.





La relation $S_n = \dfrac{n^2\,(n+1)^2}{4}$ est donc bien démontrée, pour tout n entier naturel.