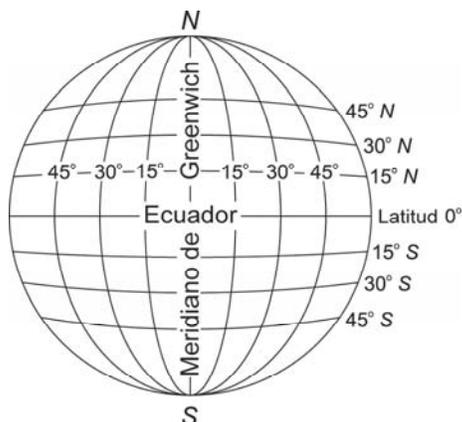


Nombre: \_\_\_\_\_ Fecha: \_\_\_\_\_

## Actividad NUMB3RS: Viajes en buenos círculos

En "Racha, Parte I", Don y Edgerton han trazado un mapa preciso de una racha de crímenes perpetrados por dos amantes. La racha va de Austin, Texas, a San Bernardino, California, y pasa (en orden) por las ciudades de Mesquite, Texas, Oklahoma City, Oklahoma; McPherson, Kansas; Colby, Kansas; Ft. Collins, Colorado; Salt Lake City, Utah; Milford, Utah y Las Vegas, Nevada. Charlie cree que los criminales pasaron por otra ciudad en el camino pero sin cometer un crimen allí. Identificó esta "ciudad misterio" hallando las distancias entre otras parejas de ciudades en la ruta de la racha aplicando una fórmula que incluye la latitud y longitud de cada ciudad. En todas las siguientes preguntas debe suponerse que el radio de la Tierra  $R$  es de 3,956 millas.



[Source: *Geometry*, Roger Fenn, Spring Verlag 2001, ISBN 1-85233-58-9, p. 261]

El ecuador tiene una latitud de  $0^\circ$  y el primer meridiano (que pasa por Greenwich, Inglaterra) tiene una longitud de  $0^\circ$ . Vamos a usar funciones trigonométricas en vez de norte (N) y sur (S), por lo cual las latitudes al norte del ecuador tendrán valores positivos y aquellas al sur del ecuador tendrán valores negativos. Igualmente, los puntos al este del primer meridiano tendrán longitudes positivas y los puntos al oeste del primer meridiano tendrán longitudes negativas.

1. Si un punto en el ecuador es (latitud, longitud) =  $(c^\circ, d^\circ)$ , ¿qué valores son posibles para  $c$  y  $d$ ?
2. Si un punto en el primer meridiano es (latitud, longitud) =  $(e^\circ, f^\circ)$ , ¿qué valores son posibles para  $e$  y  $f$ ?
3. Halla la distancia en círculo máximo entre Quito, Ecuador ( $0^\circ, 79^\circ\text{O}$ ) y Kampala, Uganda ( $0^\circ, 33^\circ\text{E}$ ). [Pista: Debe hallarse primero la circunferencia de la Tierra. Luego, busca el ángulo que se forma en el centro del círculo máximo (ecuador) con los radios de estas dos ciudades].
4. Halla la distancia en círculo máximo entre St. Louis ( $39^\circ\text{N}, 90^\circ\text{O}$ ) y New Orleans ( $30^\circ\text{N}, 90^\circ\text{O}$ ).

Para hallar una fórmula que indique la distancia en círculo máximo entre dos ciudades cualesquiera sobre la Tierra, considera las fórmulas en una esfera de radio 1. Luego, la distancia de círculo máximo correspondiente en la Tierra se halla multiplicando nuestros resultados por 3,956 miles, el radio de la Tierra.

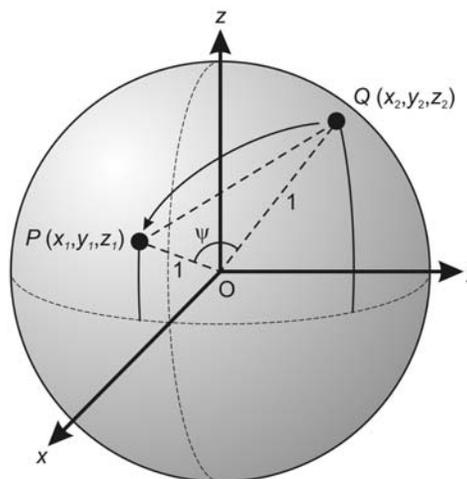
### Distancia Cartesiana

5. Considera una esfera de radio 1.

- a. La distancia en círculo máximo  $PQ$  es igual a  $\psi$  ( $m\angle POQ$ ) medido en radianes. ¿Por qué?

Podemos hallar  $\psi$  hallando  $\cos \psi$  con la Ley de Cosenos en  $\triangle OPQ$ . Así,  
 $PQ^2 = 1^2 + 1^2 - 2\cos \psi$ .

- b. Demuestra que el  $\cos \psi = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$  usando la fórmula de Distancia Cartesiana para dos puntos en el espacio.

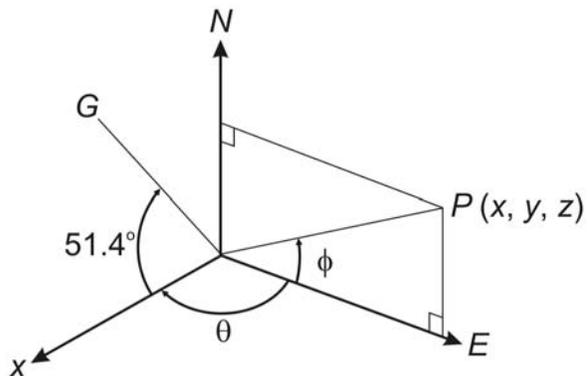


6. Halla el perímetro del triángulo esférico cuyos vértices sean  $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$ ,

$$\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \text{ y } \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right).$$

### Distancia usando latitud y longitud

7. Esta figura representa parte de una esfera unitaria. Supón que G corresponde a Greenwich. Luego el arco  $NGX$  sería el "primer meridiano" y  $\theta$  sería la **longitud** del punto  $P$ . Igualmente, si el arco  $XE$  es parte del ecuador, entonces  $\phi$  sería la **latitud** del punto  $P$ . Entonces podemos expresar  $x, y, z$  en términos de  $\theta$  y  $\phi$  como sigue:



$$\begin{aligned} x &= \cos \phi \cos \theta \\ y &= \cos \phi \sin \theta \\ z &= \sin \phi \end{aligned}$$

Explica con tus propias palabras por qué estas relaciones son válidas.

Para expresar  $\cos \psi$  en términos de  $\phi$  y  $\theta$ , sustituye estas relaciones dentro de la fórmula  $\cos \psi = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$  que se obtuvo arriba. La distancia en círculo máximo entre dos puntos  $P$  y  $Q$  con latitud y longitud  $\phi_1, \theta_1$  y  $\phi_2, \theta_2$  es  $\psi$  (en radianes), donde

$$\cos \psi = \cos \phi_1 \cos \phi_2 \cos (\theta_1 - \theta_2) + \sin \phi_1 \sin \phi_2.$$

La distancia, en millas, entre dos puntos de la tierra de latitud y longitud

$\phi_1, \theta_1$  y  $\phi_2, \theta_2$ , pues, es  $3,956 \psi \cdot \frac{\pi}{180}$ , donde  $\psi$  se halla usando el coseno inverso y se

mide en grados. (Fíjate que si hallamos  $\psi$  en radianes, entonces la distancia es simplemente  $3956 \psi$ .)

8. Aplica esta fórmula para verificar la distancia en círculo máximo entre St. Louis y Nueva Orleans que se halló en la Pregunta 4.
9.
  - a. Halla la distancia en círculo máximo (en millas) entre Chicago ( $42^\circ\text{N}$ ,  $88^\circ\text{O}$ ) y Washington, DC ( $39^\circ\text{N}$ ,  $77^\circ\text{O}$ ).
  - b. Supongamos que abrimos un túnel el línea recta entre Chicago y Washington, DC. ¿Cuántas millas mediría este túnel?
  - c. ¿Por qué son aproximadamente iguales las respuestas a las preguntas a y b?
10.
  - a. Halla la distancia en círculo máximo (en millas) entre Chicago ( $42^\circ\text{N}$ ,  $88^\circ\text{O}$ ) y Singapur ( $1^\circ\text{N}$ ,  $104^\circ\text{E}$ ).
  - b. Supongamos que abrimos un túnel el línea recta entre Chicago y Singapur. ¿Cuántas millas mediría este túnel?

*El objeto de esta actividad es dar a los estudiantes un vistazo breve y sencillo de un tema matemático muy extenso. TI y NCTM invitan a usted y a sus estudiantes a aprender más sobre este tema con las extensiones que se ofrecen abajo y con su propia investigación independiente.*

## Extensiones

### Para el estudiante

1. Halla la distancia en círculo máximo entre Austin, Texas, y San Bernardino, California (las ciudades donde empezó y terminó la racha de crímenes en este episodio). (Pista: primero hay que hallar la latitud y la longitud de cada ciudad.)
2. Hay muchas calculadoras de "distancias en círculo máximo" en el Internet. A continuación citamos algunos ejemplos. Aprovecha uno de estos sitios Web para hallar las distancias en círculo máximo entre varias parejas de ciudades que te gustaría visitar.
  - How Far Is It: <http://www.indo.com/distance>
  - Great Circle Mapper: <http://gc.kls2.com>
  - Great Circle Navigation Calculator:  
<http://www.csgnetwork.com/marinegrcircalc.html>
3. Si calculas distancias en círculo máximo "cortas" con esta fórmula en tu calculadora, es posible que los resultados no sean muy acertados. ¿Por qué?
4. Muchos navegantes miden distancias en millas náuticas en vez de las millas terrestres, que son más conocidas. ¿Cuál es la diferencia entre una milla terrestre y una milla náutica? ¿Cómo podríamos modificar la fórmula para distancia en círculo máxima para que exprese los resultados en millas náuticas?
5. Deriva la fórmula  $\cos \psi = \cos \phi_1 \cos \phi_2 \cos (\theta_1 - \theta_2) + \sin \phi_1 \sin \phi_2$ .