¿Función Coseno la derivada de la función Seno?

Profesor: Marco Barrales

INTRODUCCIÓN

Una de las mayores dificultades que se tiene al comenzar a estudiar la derivada de una función es la comprensión de sus aplicaciones, principalmente su significado geométrico. Mientras que el cálculo de derivadas suele resultar sencillo e incluso atractivo (dada la mecánica del proceso), las aplicaciones de la derivada se convierten en un problema complejo, aunque no lo sea, debido a que en muchos casos no se ha conseguido asimilar y adquirir el concepto con claridad.

El siguiente trabajo pretende lograr el aprendizaje de este concepto utilizando para ello un problema geométrico. Comenzaremos con el concepto de derivada y después con el problema geométrico.

CONCEPTO de DERIVADA

Si se da un incremento h a la variable real x, (es decir, si x pasa de $x = x_0$ a $x = x_0 + h$), la función $y = f(x)$ se verá incrementada en $y = f(x_0 + h) - f(x_0)$ a partir del valor $y = f(x_0)$. El cuociente $\frac{\textit{incremento de } y}{\textit{incremento de } x}$**,** recibe el nombre de cuociente medio de incrementos de la función en el intervalo comprendido entre x_0 y $x_0 + h$.

PENDIENTE

Si $h \neq 0$ y $h \in IR^+$, entonces los dos puntos distintos (a, $f(a)$) y ($a+h$, $f(a+h)$) determinan, como en la figura 1, una recta cuya pendiente es $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

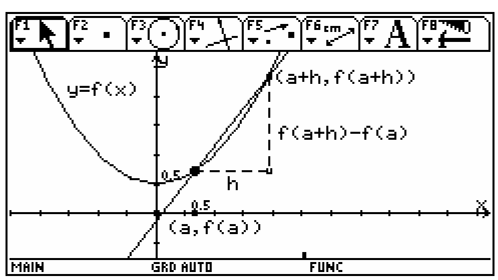


Figura 1.

Como indica la figura 2, la “tangente” en (a, $f(a)$) parece ser el límite, en algún sentido, de estas “secantes”, cuando h se aproxima a 0. La pendiente de la tangente (a, $f(a)$) debería ser $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

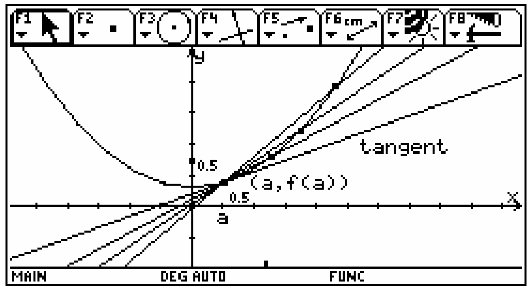


Figura 2.

DEFINICIÓN

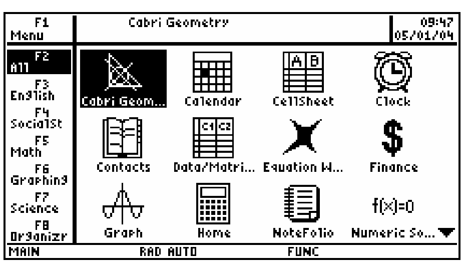
La función *f* es **derivable en el punto** *a* si $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe.

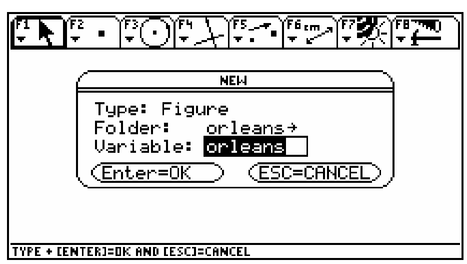
En este caso el límite se designa por $f\,'(a)$ y recibe el nombre de **derivada de** *f* **en** *a*. (Decimos también que *f* es **derivable** si *f* es derivable en *a* para todo *a* del dominio de *f*.)

Definimos la **tangente** a la gráfica de f en $(a, f(a))$ como la recta que pasa por $(a, f(a))$ y tiene por pendiente $f\,'(a)$. Esto quiere decir que la tangente en $(a, f(a))$ sólo está definida si f es derivable en a.

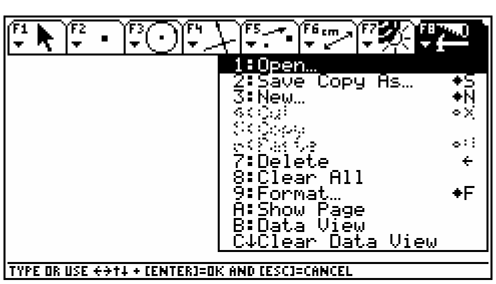
PROBLEMA:En base al concepto geométrico de la derivada, construir geométricamente la derivada de la función trigonométrica seno ($y = f(x) = \sin(x)$). Pasos:

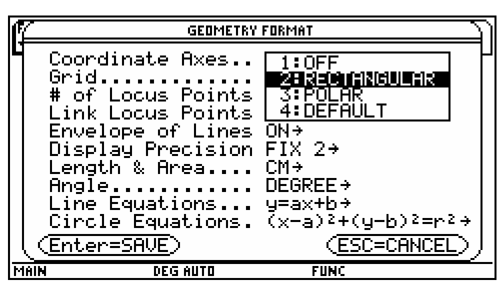
1. Utilizar de las aplicaciones de la Voyage 200 la aplicación Cabri Geometry, seleccionar un nuevo archivo y digitar un nombre "**orleans**" y presionar dos veces enter para ingresar en la pantalla de Cabri.



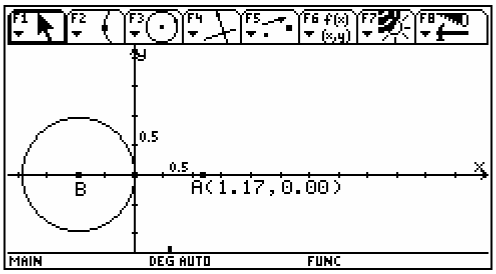


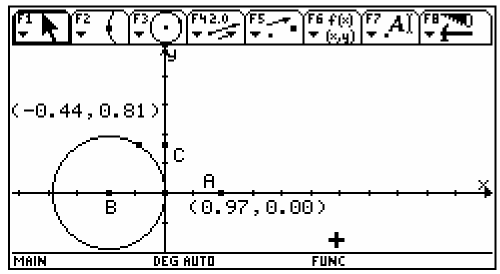
2. En Cabri construiremos la función trigonométrica seno para lo cual incluiremos un sistema cartesiano de ejes (*F8 9:Format Coordinate Axes.. 2:RECTANGULAR*).





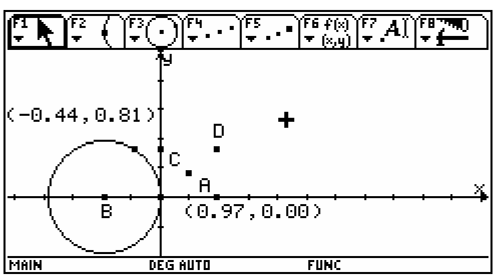
3. Determinar un punto A sobre el eje X (*F2 2:Point on Object*) y calcular sus coordenadas (*F6 5:Equation & Coordinates*).
4. Dibujar una circunferencia con centro el punto B y radio cualquiera sobre el eje X .

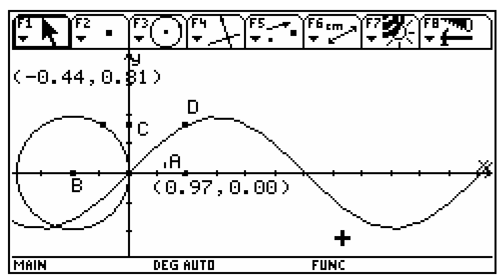




5. Transferir el valor de la abscisa del punto A sobre la circunferencia (*F4 9: Measurement Transfer*) y determinar las coordenadas del punto que se originó sobre la circunferencia.
6. Transferir el valor de la ordenada de este nuevo punto al eje Y determinando el punto C.

7. El punto de coordenadas abscisa A y de ordenada C, lo determinaremos con *F4 3:Midpoint* entre los puntos A y C, luego en *F5 5:Symmetry* del punto centro del sistema cartesiano de ejes con respecto al punto medio. (punto D).

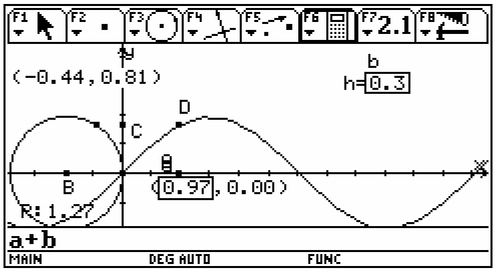


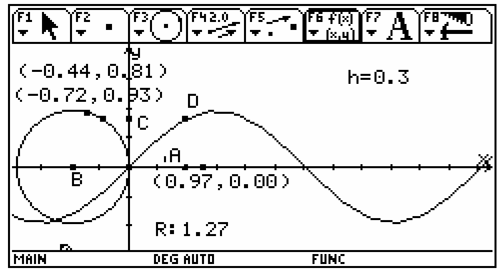


8. Determinaremos el Lugar Geométrico del punto D con respecto al punto A en el eje X , con lo cual obtendremos la función seno (*F4 A: Locus)*. Para “suavizar” la gráfica haz clic en el lugar geométrico y presiona la tecla +. Ahora determinaremos su derivada.

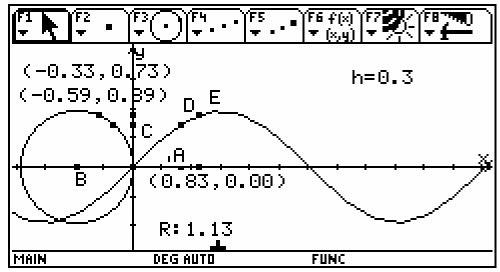
9. Primero debemos definir un valor para h (por ejemplo $h = 0.3$) que representará nuestro incremento (*F7 6:Numerical Edit).*

10. Utilizando la herramienta calculadora de Cabri (*F6 6:Calculate*) determinamos el valor de $x+h$ (1.27), transferimos el resultado al eje X y a la circunferencia.

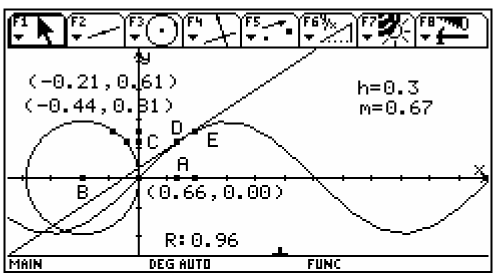


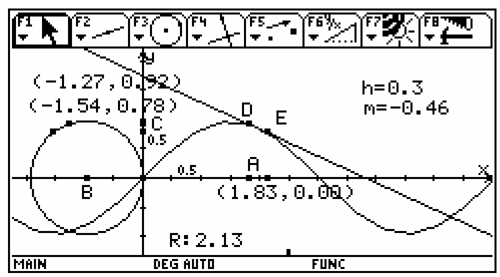


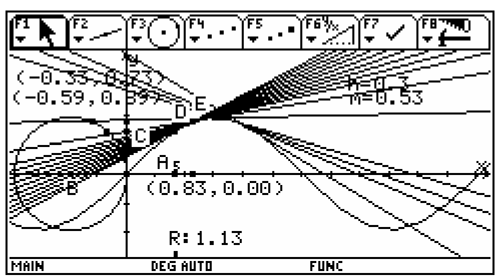
11. Determinamos las coordenadas del nuevo punto en la circunferencia y transferimos la ordenada al eje Y. Repitiendo el paso 7 para estos nuevos puntos obtenemos el punto E.



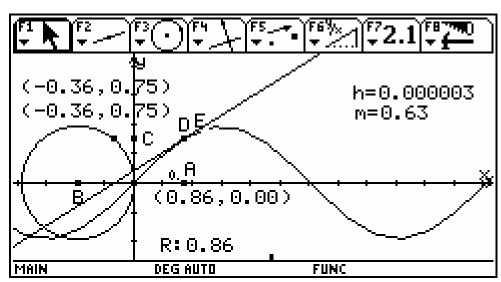
12. Para utilizar el concepto de la derivada necesitamos trazar un recta (secante) para los puntos D y E (*F2 4:Line*). Mover  el punto A para observar el cambio de la secante y de la pendiente m (*F6 4:Slope*)



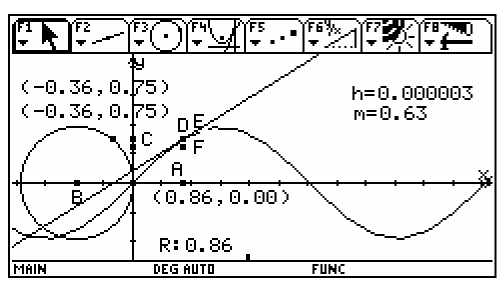




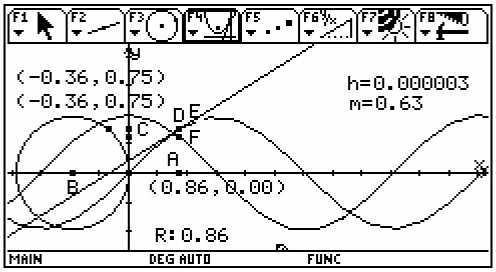
13. Ahora para transformar la secante en tangente, hacemos tender h a cero ($h \to 0$) y punto E coincide con punto D, con lo cual nuestra pendiente se transforma en la derivada de la función en ese punto (concepto).

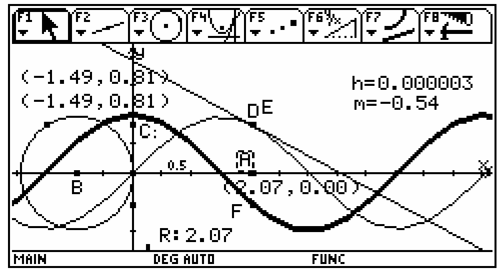


14. Para representar la derivada transferimos el valor de la pendiente de la tangente en el punto D de la función al eje Y (*F4 9: Measurement Transfer*). Siguiendo la secuencia descrita en el paso 7 obtenemos el punto F y pedimos el lugar geométrico de este punto con respecto

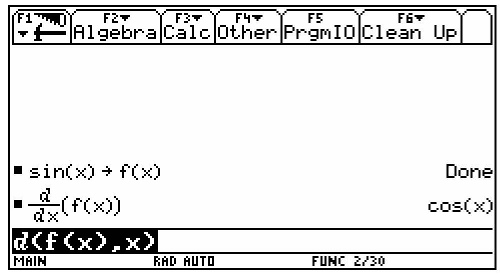


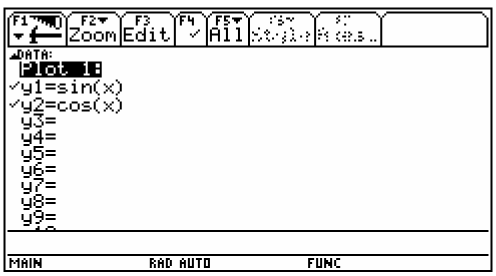
al punto A (*F4 A: Locus*) ¡¡Sorpresa!! la función trigonométrica coseno $y = \cos(x)$.

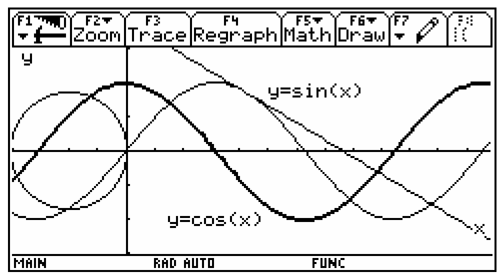




15. Si queremos comparar nuestros resultados podemos en modo HOME calcular la derivada de la función seno y luego graficar los resultados.







CONCLUSIONES

La geometría dinámica de Cabri en la Vogaye 200 nos permite explorar y recrear conceptos matemáticos, que habitualmente no se presentan en forma gráfica, con lo cual el aprendizaje resulta más completo y participativo.

Además un instrumento como la calculadora gráfica provee un rico ambiente para la resolución de problemas complejos, y puede ser pensado como una herramienta cognitiva o bien como un agente didáctico. La representación de un mismo objeto matemático en distintos sistemas de representación semióticos y la conexión entre los mismos permite que el encuentro entre el sujeto y el medio sea fructífero, y que el sujeto se apropie del conocimiento de una manera más efectiva.