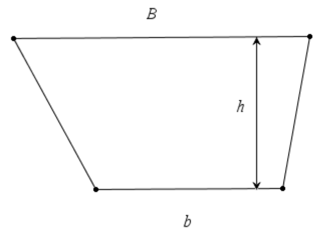
Aire d'un trapèze et optimisation

Soient ABC un triangle rectangle en A tels que $AB = 3$ et $AC = 4$. Soit I le milieu du segment $[AC]$. On considère un point M mobile sur le segment $[BC]$. On note H le projeté orthogonal de M sur le segment $[AB]$.

1°) a) Réaliser la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie.
1°) b) Démontrer que $AHMI$ est un trapèze.
2°) On pose $x = BM$. On s'intéresse à l'aire du trapèze $AHMI$; on va chercher pour quelles(s) valeur(s) de x cette aire est maximale. A l'aide du logiciel conjecturer ce maximum.
Faire apparaître la courbe représentative de la fonction qui à x associe l'aire de $AHMI$ sur une feuille graphique.
3°) a) Calculer la longueur BC.
b) Dans quel intervalle varie x ?
c) Démontrer que $MH = 0{,}8x$ et que $AH = 3 - 0{,}6x$.
d) Montrer que l'aire du trapèze $AHMI$ est $A_{AHMI} = (0{,}4x + 1)(3 - 0{,}6x)$.
On rappelle que l'aire d'un trapèze est donnée par $A_{trap\grave{e}ze} = \frac{(B+b)\times h}{2}$.



e) Déterminer par le calcul la valeur de x qui rend l'aire de $AHMI$ maximale.
4°) a) A l'aide du logiciel, conjecturer la ou les positions de M sur le segment $[BC]$ telle que l'aire $AHMI$ représente 25% de celle du triangle ABC.
4°) b) Vérifier votre conjecture à l'aide d'un calcul.

Travail demandé :

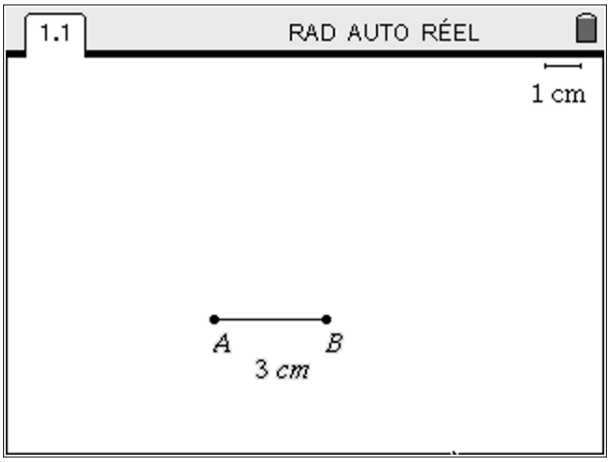
1°) Appeler le professeur à la fin des questions 1.a, 2 et 4a.
2°) Réponse écrite pour les autres questions avec une rédaction rigoureuse et précise.

1°) a) Réaliser la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie.

Dans une feuille de Graphiques & Géométrie, afficher le plan géométrique (menu **Affichage | Afficher Plan géométrique**).

Puis placer deux points A et B (menu **Points et droites | Point**)

Tracer le segment $[AB]$ (menu **Points et droites | Segment**) et sélectionner les deux points A et B.
Afin de fixer la longueur du segment à 3 cm, afficher la longueur du segment puis la fixer à 3.

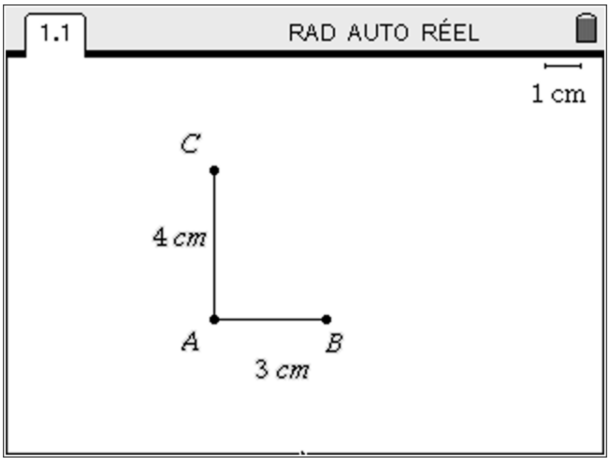


Le triangle est rectangle en A, on va donc construire la perpendiculaire à $[AB]$ passant par A (menu **Constructions | Perpendiculaire** puis cliquer sur le point A et sur le segment $[AB]$)

Placer un point C sur cette droite

Masquer cette droite (menu **Action | Afficher/Cacher**).

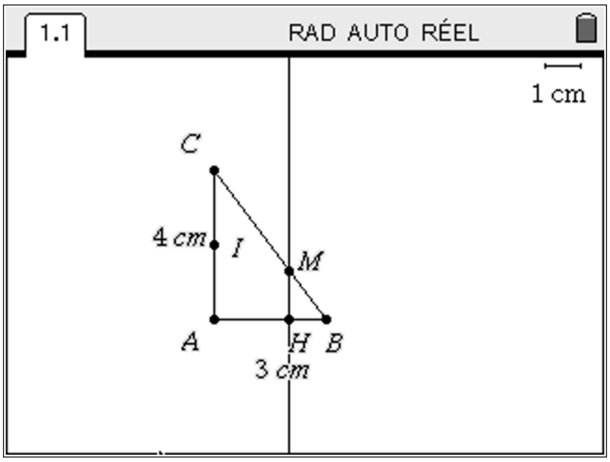
Tracer le segment $[AC]$, afficher sa longueur et modifier cette dernière pour avoir 4 comme dans l'énoncé.



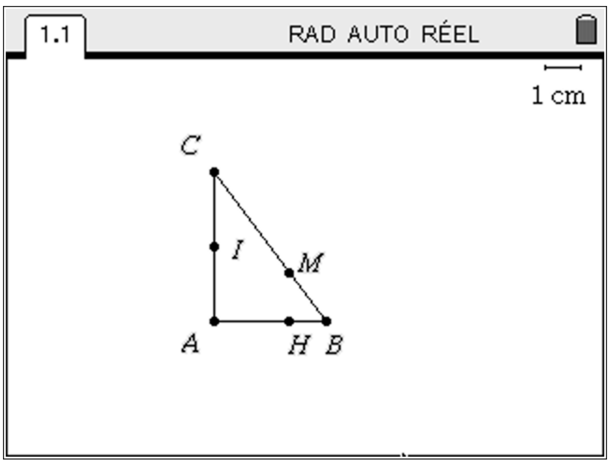
Tracer le milieu du segment $[AC]$ (menu **Constructions | Milieu** et sélectionner le segment [AC] et le nommer I)

Tracer le segment $[BC]$ puis placer un point M sur le segment $[BC]$.

Pour tracer le point H on trace tout d'abord la perpendiculaire à $[AB]$ passant par M. H est le point d'intersection de cette droite avec $[AB]$.

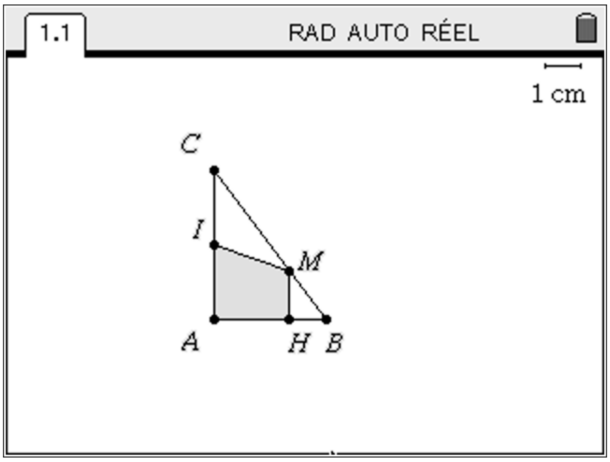


On peut maintenant masquer les différents éléments inutiles dans la suite de l'exercice :



1°) b) Démontrer que $AHMI$ est un trapèze.

Le triangle ABC est rectangle en A donc $(AI) \perp (AB)$.
De plus par construction $(AB) \perp (HM)$ ce qui prouve que $(AI) \parallel (MH)$. Le quadrilatère $AHMI$ est donc bien un trapèze.
On peut dessiner à l'aide du TInspire le quadrilatère $AHMI$ (MENU Figure Polygone et cliquer sur les points A, H, M et cliquer 2 fois sur I pour signifier que I est le dernier point.
Pour colorier le polygone en gris faire un clique droit attributs et choisir le type de gris avec la flèche de droite.

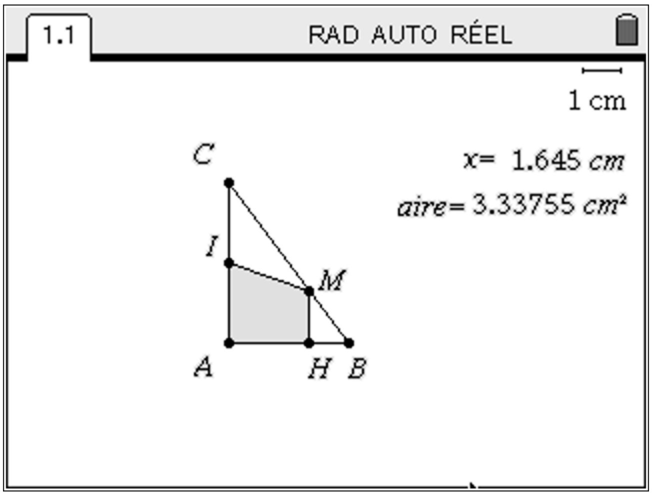


2°) On pose $x = BM$. On s'intéresse à l'aire du trapèze $AHMI$; on va chercher pour quelles(s) valeur(s) de x cette aire est maximale. A l'aide du logiciel conjecturer ce maximum.
Faire apparaître la courbe représentative de la fonction qui à x associe l'aire de $AHMI$ sur une feuille graphique.

Commençons par mesurer la longueur BM :

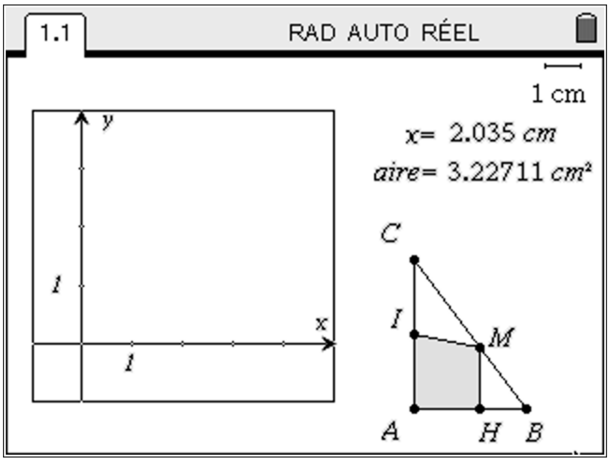
Cliquer sur MENU Mesures | Longueur et sélectionner les points B et M. Cliquer encore une fois sur un coin de la figure pour afficher la valeur numérique de BM.
On peut ajouter un texte devant cette valeur : MENU Actions | Texte et entrer comme texte $x =$.

On mesure aussi l'aire du quadrilatère $AHMI$.

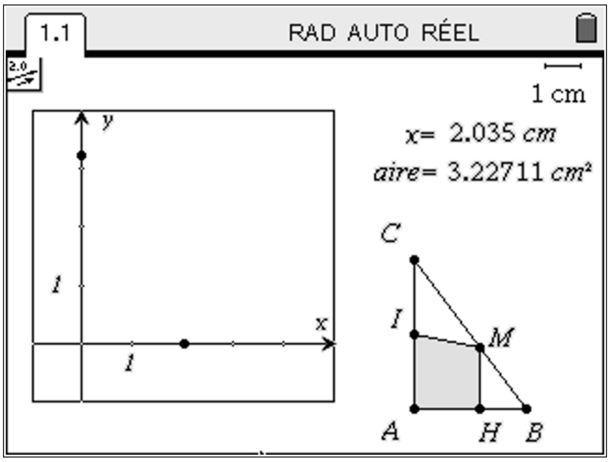


Pour afficher la courbe représentant l'aire du trapèze en fonction de x, on insère tout d'abord la zone analytique : MENU Affichage | Afficher la zone analytique.

On peut déplacer les différents éléments de la figure pour avoir une bonne visibilité.
Pour modifier les axes il suffit de faire un clique droit Zoom | Réglages de la fenêtre.
On a choisit ci contre $-1 \leq x \leq 5$ et $-1 \leq y \leq 4$.

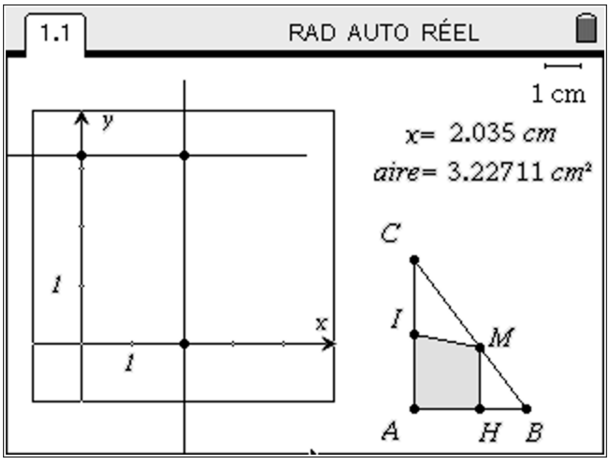


On va reporter les valeurs de x et de l'aire sur respectivement l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.
On appuie sur MENU Constructions | Report de mesures et on sélectionne la valeur numérique de x (donc 2,035 dans la figure ci-contre) et on clique sur l'axe des abscisses pour reporter cette mesure.
On procède de même avec l'aire qu'on reporte sur l'axe des ordonnées.

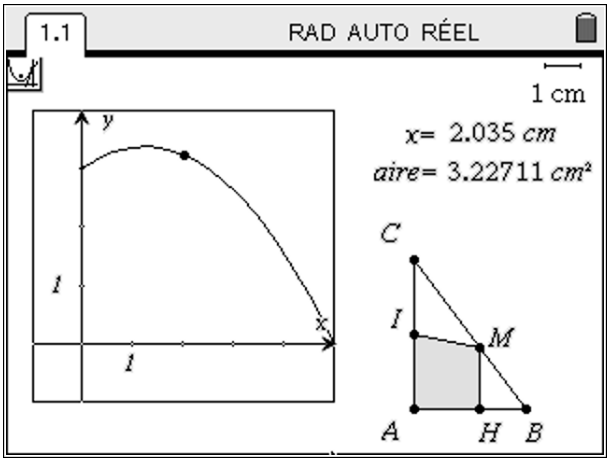


On va maintenant construire le point d'abscisse BM et d'ordonnée l'aire du trapèze.

Pour cela on va construire les deux perpendiculaires comme dans la figure ci-contre. Le point recherché est l'intersection des deux perpendiculaires cherchées.

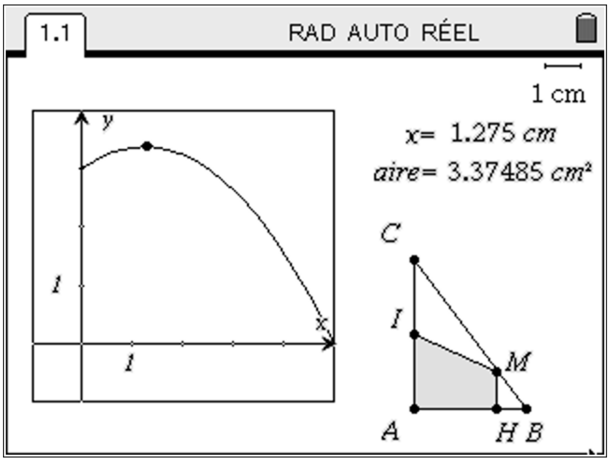


On peut retirer les traits de construction, puis afficher la courbe en cliquant sur menu **Constructions | Lieu** et sélectionner le point de coordonnées (x, A_{AHMI}) et le point M.



On trouve que l'aire est maximale lorsque $x = 1{,}275$.

L'aire maximale vaut 3,37485



3°) a) Calculer la longueur BC.

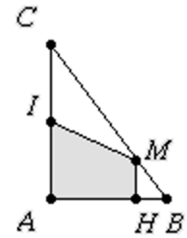
ABC est un triangle rectangle en A donc $AB^2 + AC^2 = BC^2$ soit $3^2 + 4^2 = BC^2$ donc $BC = 5$.

3°) b) Dans quel intervalle varie x ?

M appartient au segment BC donc x, c'est-à-dire la longueur BM décrit l'intervalle [0 ; 5]

3°) c) Démontrer que $MH = 0,8x$ et que $AH = 3 - 0,6x$.

Appliquons le théorème de Thalès dans le triangle ABC :



On sait que $M \in [BC]$; $H \in [AB]$; $(HM) \parallel (AC)$ donc
$\frac{HM}{AC} = \frac{BH}{BA} = \frac{BM}{BC}$ ainsi $\frac{HM}{4} = \frac{BH}{3} = \frac{x}{5}$ ce qui prouve que $MH = \frac{4}{5}x = 0,8x$.

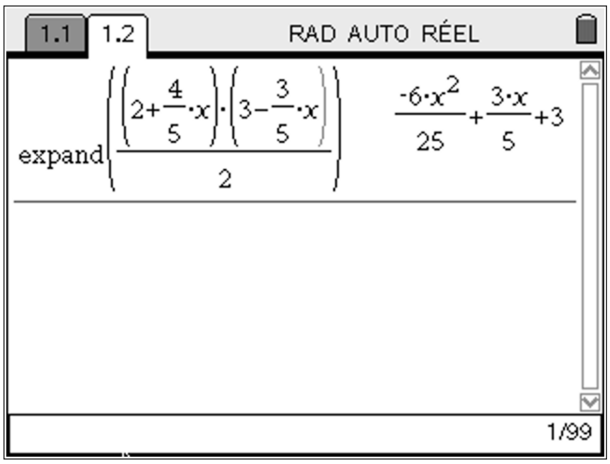
De plus $AH = AB - BH = 3 - \frac{3}{5}x = 3 - 0,6x$

3°) d) Montrer que l'aire du trapèze $AHMI$ est $A_{AHMI} = (0,4x + 1)(3 - 0,6x)$

I est le milieu de $[AC]$ donc $AI = 2$.

En utilisant la formule de l'aire d'un trapèze on a :

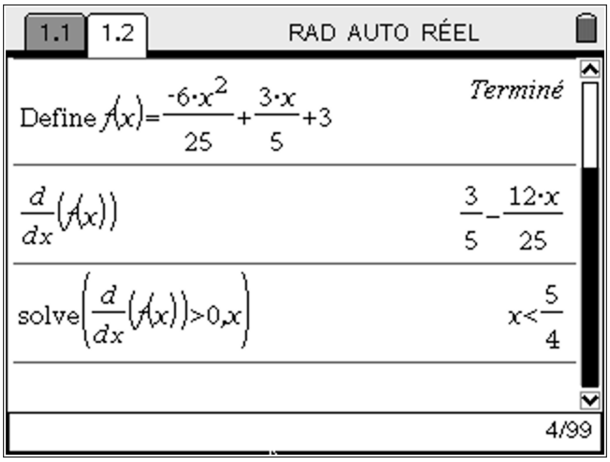
$$A_{AHMI} = \frac{(AI + MH) \times AH}{2} = \frac{\left(2 + \frac{4}{5}x\right)\left(3 - \frac{3}{5}x\right)}{2}$$
$$= \frac{6 - \frac{6}{5}x + \frac{12}{5}x - \frac{12}{25}x^2}{2} = -\frac{6}{25}x^2 + \frac{3}{5}x + 3$$



3°) e) Déterminer par le calcul la valeur de x qui rend l'aire de $AHMI$ maximale.

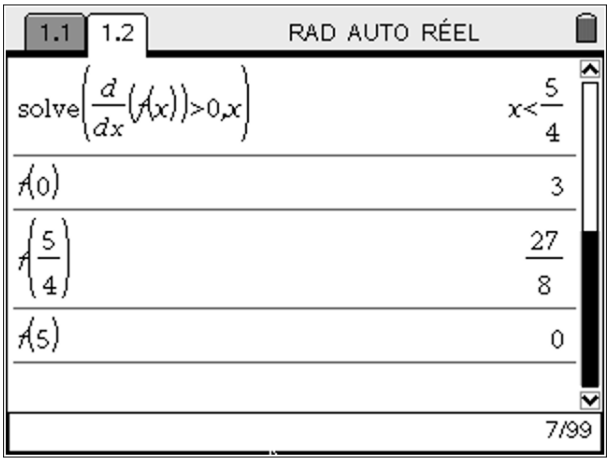
Etudions la fonction f définie par $f(x) = -\frac{6}{25}x^2 + \frac{3}{5}x + 3, x \in [0; 5]$
f est une fonction polynôme, donc f est dérivable sur son ensemble de définition $[0; 5]$:

Pour tout $x \in [0; 5]$ on a $f'(x) = -\frac{12}{25}x + \frac{3}{5}$.
$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -\frac{12}{25}x + \frac{3}{5} > 0 \Leftrightarrow x < \frac{5}{4}$$
f est croissante sur $\left[0; \frac{5}{4}\right]$ et f est décroissante sur $\left[\frac{5}{4}; 5\right]$



On obtient le tableau de variations suivant :

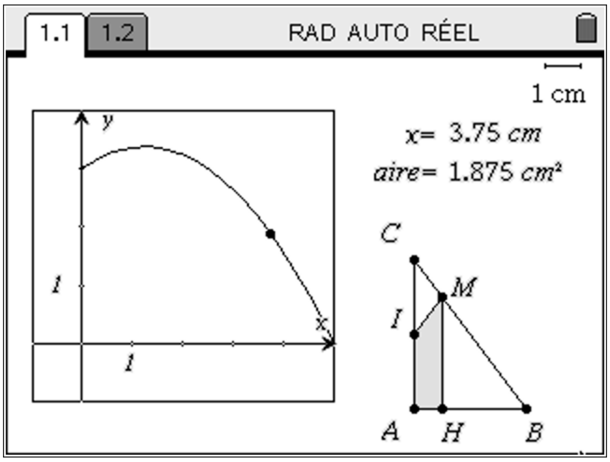
x	0		$\frac{5}{4}$		5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	3	$\nearrow$	$\frac{27}{8}$	$\searrow$	0



On calcul : $f(0) = 3$
$$f\left(\frac{5}{4}\right) = -\frac{6}{25}\left(\frac{5}{4}\right)^2 + \frac{3}{5} \times \frac{5}{4} + 3 = \frac{27}{8}$$
$$f(5) = -\frac{6}{25} \times 5^2 + \frac{3}{5} \times 5 + 3 = 0$$

Conclusion : la valeur de x qui rend l'aire de $AHMI$ maximale est $x = \frac{5}{4}$.
Et dans ce cas l'aire a pour valeur $\frac{27}{8}$

4°) a) A l'aide du logiciel, conjecturer la ou les positions de M sur le segment $[BC]$ telle que l'aire $AHMI$ représente 25% de celle du triangle ABC.

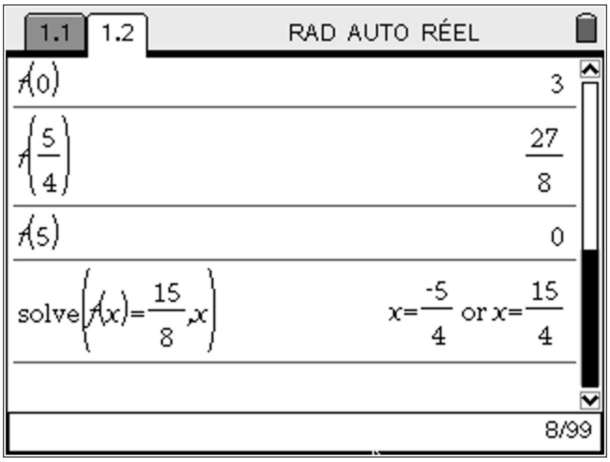


L'aire du triangle ABC est $\frac{1}{2} \times 3 \times 5 = \frac{15}{2}$. On va donc rechercher la position du point M telle que l'aire du trapèze $AHMI$ égale $\frac{15}{8} = 1{,}875$
On trouve $x = 3{,}75$ à l'aide du logiciel.

4°) b) Vérifier votre conjecture à l'aide d'un calcul.

On va donc résoudre l'équation $f(x) = \frac{15}{8} \Leftrightarrow -\frac{6}{25}x^2 + \frac{3}{5}x + 3 = \frac{15}{8} \Leftrightarrow -\frac{6}{25}x^2 + \frac{3}{5}x + \frac{9}{8} = 0$

$$\Delta = \frac{9}{25} - 4 \times \left(-\frac{6}{25}\right) \times \frac{9}{8} = \frac{36}{25}$$



Il y a donc 2 solutions :

$$x = \frac{-\frac{3}{5} - \frac{6}{5}}{-\frac{12}{25}} = \frac{\frac{9}{5}}{\frac{12}{25}} = \frac{9}{5} \times \frac{25}{12} = \frac{15}{4}$$

$$\text{ou } x = \frac{-\frac{3}{5} + \frac{6}{5}}{-\frac{12}{25}} = -\frac{\frac{3}{5}}{\frac{12}{25}} = -\frac{3}{5} \times \frac{25}{12} = -\frac{5}{4}$$

Or $x \in [0; 5]$ donc il n'y a qu'une solution : $x = \frac{15}{4}$

La conjecture est bien vérifiée.