L'ATTRACTION FOLLE

Graphiques TI

Mots-clés : aléatoire, simulation, programme, matrice.

1. Objectifs

- Approcher un problème de marche aléatoire.
- Utiliser différents registres pour comprendre le phénomène (simulation, matrices, programmation).

2. Énoncé

A la fête foraine, une nouvelle attraction vient de voir le jour. Une roue pouvant pivoter autour de son axe, est partagée en 6 secteurs égaux.

Un seul secteur, le rouge, donne droit à un lot important. Les autres ne correspondent qu'à des lots de consolation. Pour gagner le gros lot, il suffit qu'à l'issue de la partie, le secteur rouge soit positionné en face de la flèche, comme ci-contre. Chaque introduction d'une pièce de 1 € fait tourner la roue, de manière aléatoire, d'un secteur vers la droite (D) ou vers la gauche (G).

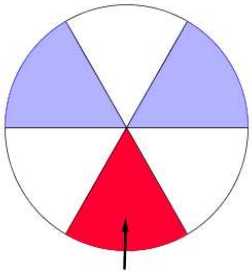


figure 1

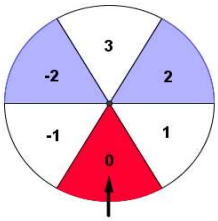
3. Conduite de l'activité

1) Première approche – Un cas particulier à 4 €

On suppose qu'avant que le joueur ne paye le premier euro, la roue est positionnée comme en figure 1.

a) Quel sera le secteur positionné en face de la flèche si la séquence de déplacements est **GDDD** ?

Il peut être plus simple de numéroter les cases de la roue comme ci-contre et de convenir alors qu'une rotation vers la droite correspond à la valeur +1 et qu'une rotation vers la gauche correspond lui à la valeur –1. Le déplacement donné en exemple s'écrit alors –1,+1,+1,+1 ce qui, si on additionne les 4 nombres, donne +2, numéro de la case finale.



Dans cette façon de procéder, le résultat –3 sera assimilé au résultat +3.

b) Simuler, à l'aide de la calculatrice, une série de 4 rotations successives. Pour cela, générer et stocker dans la liste L1, une suite de 4 nombres valant chacun +1 ou –1, puis les ajouter.

Pour faciliter les simulations futures, on peut saisir les 2 instructions sur une même ligne en les séparant par **:**.

Valider plusieurs fois pour obtenir plusieurs simulations.

Que remarque-t-on sur les résultats ? Expliquer.

c) Est-il raisonnable de penser que le joueur puisse gagner le lot principal ?

d) Justifier que dépenser 5 € plutôt que 4, ne constitue pas une bonne stratégie.

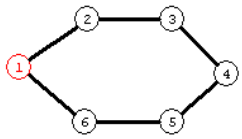
e) En quoi le fait de jouer 6 € change-t-il les possibilités de gagner ?
Comment détecter que la somme correspond au secteur rouge (utiliser les congruences) ?

f) Écrire un programme **JEU6** qui simule une partie à 6 € et affiche « gagné » ou « perdu », selon les cas.

Remarque : On pourra noter S la variable qui donne le numéro du secteur atteint après chaque mouvement.

2) Deuxième approche – Via les matrices et pour toute somme engagée

On considère le graphe à six sommets ci-contre.



Les sommets sont les six secteurs. Deux sommets sont liés dès lors que les secteurs sont voisins sur la roue (il est possible de passer de l'un à l'autre en un seul mouvement).

On suppose à nouveau que, initialement, le secteur rouge (ici le sommet 1) est en position « gagné ».

a) Donner la matrice de transition A de ce graphe.

b) Rappeler comment, à l'aide des puissances de A, on peut déterminer la probabilité pour qu'un joueur gagne en ayant dépensé exactement n €.

c) En déduire la probabilité de gagner en ayant dépensé exactement 4 € et comparer le résultat à votre réponse formulée en **1c**.

d) Le joueur est-il assuré de gagner, quitte à dépenser une somme importante ?

e) Désormais, le chariot est positionné de manière aléatoire à l'arrivée du joueur.
Comment, via la matrice A, peut-on obtenir la probabilité de gagner après exactement n rotations de la roue ?

f) Que faut-il modifier dans le cas où la roue à 1 chance sur 5 de rester immobile, 2 chances sur 5 de tourner d'un secteur à droite et 2 chances sur 5 de tourner d'un secteur à gauche ?

3) Troisième approche – Un algorithme qui détecte la victoire

Un joueur espère arriver à ses fins en engageant 20 euros au maximum. Il peut donc activer le chariot jusqu'à 20 fois mais peut décider de s'arrêter à l'issue de n'importe lequel des 20 mouvements.
Initialement, le chariot est positionné sur la case 0.

a) A l'aide du tableur

Générer une liste de 20 entiers égaux à +1 ou −1 dans la colonne liste L1.

Les graphiques TI (TI-82 à TI-84) disposent d'une instruction **somCum** (en anglais **cumSum**), permettant d'obtenir, dans la liste L2, de proche en proche les sommes des entiers de la liste L1.

Comment le joueur détecte-t-il les passages du chariot en position 0 ?

Remarque : L'inconvénient est ici que l'on ne peut pas facilement aisément renouveler la simulation.

b) Avec un programme

Écrire un programme **GAIN** qui donne le nombre d'euros nécessaires pour gagner.

Ci-contre, un exemple d'algorithme possible.

```
Initialiser P à 1 ou −1 (P : position après le premier euro)
Initialiser N à 1 (N : nombre de rotations)
Tant que le chariot n'est pas revenu en position initiale et
que l'on a dépensé 20 € ou moins faire
        Ajouter 1 ou −1 à P
        Augmenter N de 1
Fin tant que
Si le secteur rouge a été atteint
        Afficher GAGNÉ EN N EUROS
Sinon
        Afficher PERDU
Fin Si
```

Remarque : Le fait d'initialiser P à ±1, et donc N à 1, revient à commencer la boucle après le premier mouvement de la roue. Il reste donc au maximum 19 mouvements à faire.

c) Écrire un programme **CUMUL** permettant de sommer les résultats lors de 100 exécutions du programme **GAIN** et qui affiche la moyenne obtenue.

Attention ! Le programme **GAIN** affiche du texte que l'on ne souhaite pas voir à chaque répétition. On utilisera donc plutôt un programme **GAIN2**, dans lequel le texte aura été supprimé.