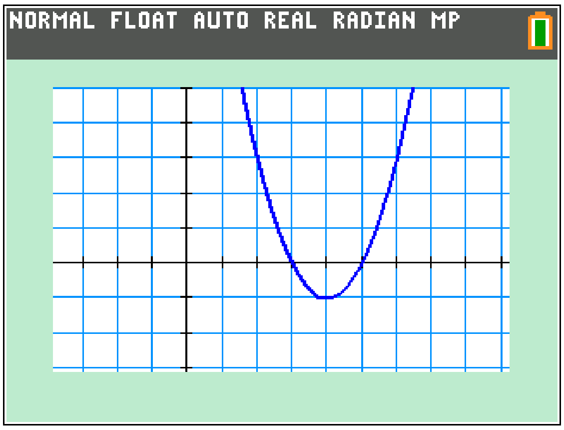
Hantera andragradskurvor del 3

I de två första aktiviteterna om andragradsfunktioner tittade vi på hur utseendet på kurvorna när vi hade olika värden på *k*, *a* och *b* i uttrycket $y = k \cdot (x-a)^2 + b$. Att skriva funktionen på detta sätt kallas *vertexform*. Ett exempel på detta är funktionen

$y = (x-4)^2 - 1$.

Vi plottar funktionen:



Vi ser att funktionen har sitt minimivärde i punkten med koordinaterna (4, - 1). Om vi tittar på funktionsuttrycket ser vi att det minsta värde funktionen kan ha är när *x* = 4 eftersom $(x-4)^2$ då är noll och en kvadrat aldrig kan ha ett negativt värde.

Vi kan alltså direkt ur funktionsuttrycket se vilka koordinater max- eller minpunkten har.

Nollställena, dvs. var kurvan skär *x*-axeln, kan vi också beräkna. Om vi sätter *y* = 0 får vi ekvationen

$0 = (x-4)^2 - 1$

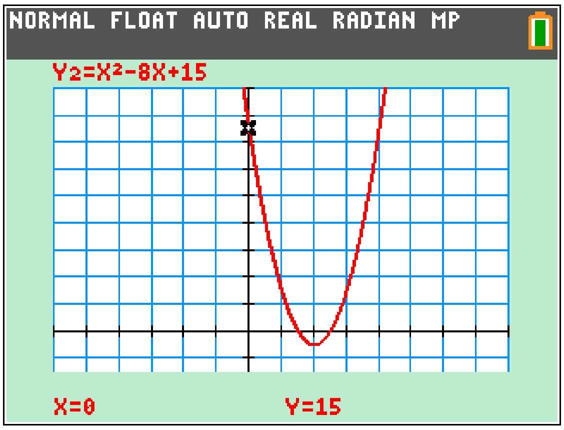
Och vi ser direkt att högerledet i ekvationen är noll när *x*= 5 och när *x* = 3.

Om vi nu *utvecklar* funktionsuttrycket får vi

$y = (x-4)^2 - 1 = x^2 - 8x + 16 - 1 = x^2 - 8x + 15$

Om du plottar $y = x^2 - 8x + 15$ får du samma kurva som ovan. Det finns dock en sak som vi direkt kan se i funktionsuttrycket och som vi inte kunde se när vi skrev funktionen i vertexform:

När *x* = 0 så blir funktionsvärdet 15. Kurvan skär alltså *y*-axeln vid 15. Vi ställer in ett bra fönster med $\boxed{\text{WINDOW}}$ och plottar. När vi sedan spårar i kurvan se vi koordinaterna.



Vi tittar nu på en annan funktion. Vi tar funktionen $y = x^2 - 10x + 21$. Vi kan direkt se att funktionen skär *y*-axeln vid x= 21. Nu vill vi beräkna max- eller minpunkt och nollställen algebraiskt. Vi försöker nu skriva om uttrycket på vertexform:

Eftersom faktorn framför x-termen är - 10 så måste det först bli $(x-5)^2$. Om vi utvecklar detta uttryck så får vi $x^2 - 10x + 25$.

Nu skulle vi ju ha 21 som konstantterm så då kan vi alltså skriva funktionen som

$y = (x-\mathbf{5})^2 \mathbf{-4}$

Vi får alltså dra ifrån 4 för att det ska stämma.

Vi har här gjort en s.k. *kvadratkomplettering*

För att beräkna nollställena sätter vi *y* = 0 och då får vi $0 = (x-5)^2 - 4$ eller om vi flyttar över – 4 till vänsterledet

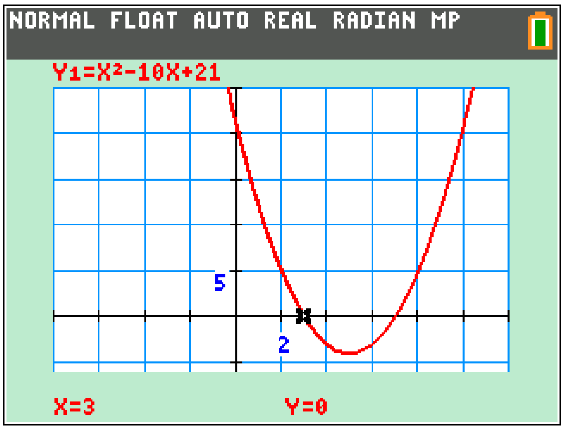
$4 = (x-5)^2$

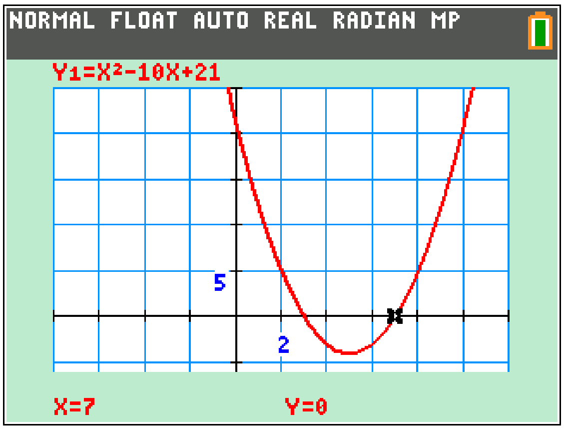
Vi ser direkt att kvadraten blir 4 när det som finns inuti parentesen har värdet 2 eller - 2 eftersom det är en kvadrat.

Alltså: $(x-5) = 2$ med lösningen x = 7 och $(x-5) = -2$ med lösningen x = 3.

Här har vi nu plottat funktionen och vi ser att nollställena är *x* = 3 och *x* = 7.

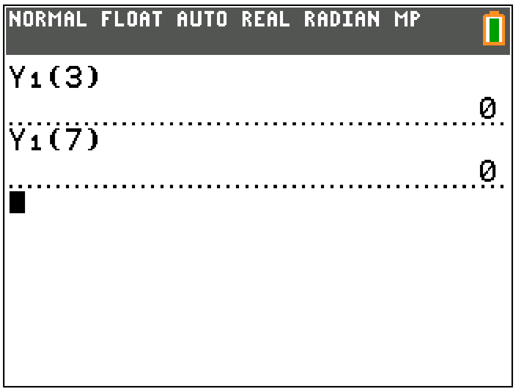
För att hitta nollställena trycker på [TRACE] och skriver in det *x*-värde du vill beräkna *y*-värdet för.



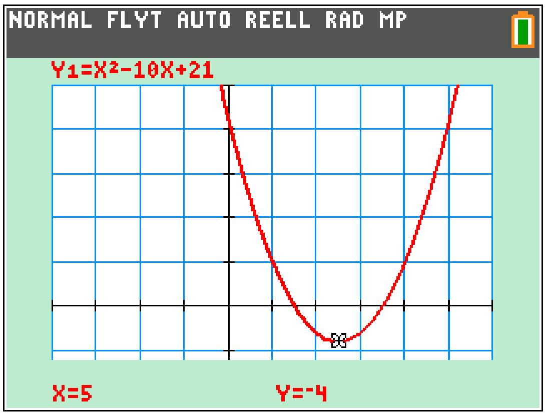


Man kan också göra beräkningen i grundfönstret. Vi har ju matat in vår funktion i Y1.

För att kopiera in Y1 i fönstret trycker man på [VARS] väljer [Y-VARS] och sedan alternativ 1:Funktion. Då kommer en lista med alla funktioner upp. Välj då Y1 och skriv sedan som nedan.



Eftersom andragradsfunktioner alltid är symmetriska omkring max- och minpunkten kan vi också enkelt räkna ut att minpunkten finns vid x = 5, dvs. mitt emellan nollställena.



Vi ser att funktionen har värdet -4 i minimipunkten.

Det kunde vi ju också se direkt när vi skrev funktionen i vertexform:

$y=(x-\mathbf{5})^2-\mathbf{4}$

Vi tar nu ett lite svårare exempel:

Beräkna nollställen och vertex (max- eller minpunkt) för funktionen

$y=-2x^2+12x-8$

Vi börjar med att bryta ut faktorn -2 eftersom det står -2 framför x^2-termen. Vi får då

$y=-2(x^2-6x)-8$

Det som står i parentesen ovan kan vi skriva om som $(x-3)^2-9$ eftersom vi måste dra bort 9. ($(x-3)^2$ är ju x^2-6x+9).

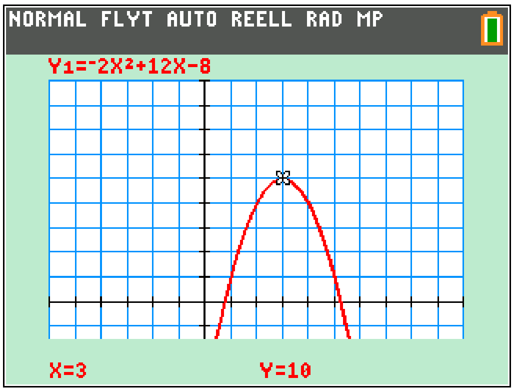
Detta ger

$y=-2\left((x-3)^2-9\right)-8$ som förenklas till

$y=-2(x-3)^2+18-8=-2(x-3)^2+10$

Vi får alltså ett vertex i punkten (3, 10).

Vi plottar funktionen för att se om det verkar stämma.



Kurvan har en *maxpunkt* eftersom vi har en negativ faktor framför x^2-termen.

Vi sätter nu uttrycket $-2(x-3)^2+10$ lika med noll. Då får vi:

$$-2(x-3)^2=-10$$

Vi dividerar båda led med -2 och får då:

$$(x-3)^2=5$$

Nu drar vi roten ur bägge leden:

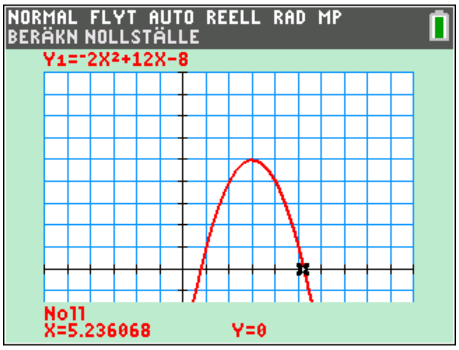
$\sqrt{(x-3)^2}=\sqrt{5}$ och får då

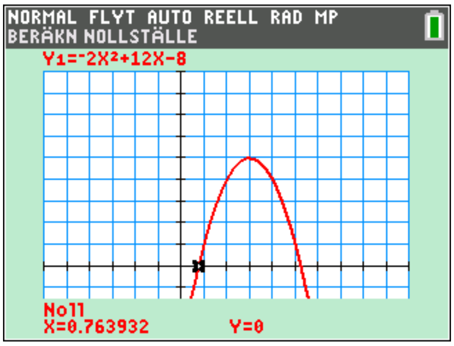
$$\pm(x-3)=\sqrt{5}$$

med lösningarna

$x_1=3+\sqrt{5}$ och $x_2=3-\sqrt{5}$

Nedan har vi beräknat lösningarna *numeriskt*. När du har grafen på skärmen trycker du på [2nd][CALC] och väljer alternativ 2:noll. Följ sedan anvisningarna på skärmen. Man ringar då först in nollstället genom att välja en vänster- och högergräns med piltangenterna.





Varför göra allt det här när man har *pq*-formeln?

Du har säkert lärt dig att använda *pq*-formeln när du löst andragradsfunktioner. Om man har en andragradsfunktion $x^2+px+q=0$ så är lösningarna

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$$

Vi tillämpar nu den på den senaste funktionen vi undersökt, nämligen $y=-2x^2+12x-8$.

Vi får först

$$-2x^2+12x-8=0$$

Nu dividerar vi båda led med -2:

$\frac{-2x^2}{-2}+\frac{12x}{-2}-\frac{-8}{-2}=0$ och får då

$$x^2-6x+4=0$$

Vi använder nu *pq*-formeln:

$$x=-\frac{-6}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{-6}{2}\right)^2--4}$$

Vi förenklar

$$x=-\frac{-6}{2}\pm\sqrt{\frac{36}{4}-4}\Rightarrow x=3\pm\sqrt{9-4}=3\pm\sqrt{5}$$

Vi får naturligtvis samma resultat. Du kommer naturligtvis att använda *pq*-formeln eftersom du direkt får fram lösningarna men när du gjort denna aktivitet har du lärt dig varför *pq*-formeln ser ut som den gör. Du får en större säkerhet i att hantera andragradsuttryck.

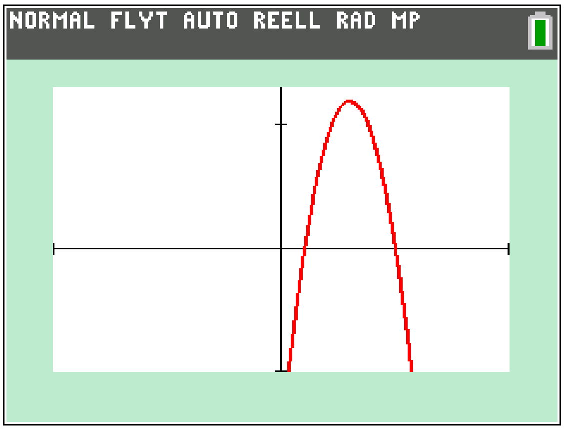
Vi tar det i steg en gång till och använder det hyfsade uttrycket $x^2-6x+4=0$ från sista exemplet där faktorn framför x^2-termen är 1.

$x^2-6x+4=0$	$x^2+px+q=0$
$x^2-6x=-4$	$x^2+px=-q$
$x^2-6x+3^2=3^2-4$	$x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$
$(x-3)^2=3^2-4$	$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$
$\pm(x-3)=\sqrt{5}$	$\pm\left(x+\frac{p}{2}\right)=\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$
$x_1=3+\sqrt{5}$	$x_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$
$x_2=3-\sqrt{5}$	$x_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$

Som slutkläm på dessa aktiviteter om andragradare så tar vi en uppgift från en lärobok:

För en funktion *f*(*x*) gäller att ekvationen $f(x)=0$ har lösningarna *x*=1 och *x*=5. Funktionens största värde är 12. Bestäm funktionen på vertexform och i utvecklad form.

Eftersom symmetrilinjen (den vertikala linjen) ligger mitt emellan nollställena så går den genom punkten x= 3 och maxpunkten har alltså koordinaterna (3, 12). Det kan vi utnyttja. En skiss av grafen är så här:



En funktion på vertexform kan skrivas:

$y=k(x-a)^2+b$

Nu har vi ju lärt oss att *a* och *b* är koordinaterna för max/min-punkten och eftersom den lutar nedåt är *k*-värdet negativt och det största värde som funktionen kan anta är när faktorn $k(x-a)^2$ är noll och då är x-värdet = *a*. *y*-värdet är då 0 + *b* = *b*.

Funktionen kan skrivas

$y=k(x-3)^2+12$

Hur ska vi nu bestämma *k*?

Vi känner ju till två punkter till på kurvan. Om vi t.ex. sätter in värdena för det vänstra nollstället, (1, 0), får vi

$0=k(1-3)^2+12$ som förenklas till

$0=k\cdot 4+12$

Vi får att *k* = - 3 och funktionen är alltså

$y=-3(x-3)^2+12$

I utvecklad form blir det då

$y=-3(x-3)^2+12=$

$=-3(x^2-6x+9)+12=$

$=-3x^2-18x-27+12=$

$=-3x^2-18x-15$

Nu kan vi plotta funktionen och se att det stämmer.