# VARIAS ACTIVIDADES DE CÁLCULO

Profesor: Marco Barrales

**1) Solución de un problema de aplicación e interpretación de la derivada**

a) **Enunciado del problema:**

El capital neto, $f$ (en millones de pesos), de una próspera compañía ha crecido en el tiempo, $x$ (en años), aproximadamente con la fórmula, $f(x) = 5 \cdot x^2 + 100,\ 0 \le x \le 5$

**Pregunta 1**: ¿Cuál será el capital al tiempo $x = 1,2,3,4,5$ años?

**Pregunta 2**: ¿Cuál fue la tasa de crecimiento promedio durante los últimos 3 años ($2 \le x \le 5$)?

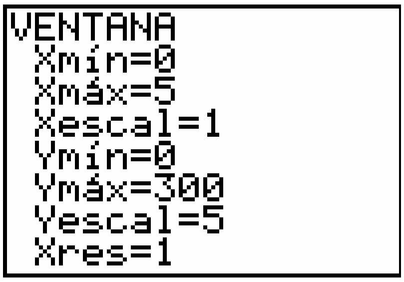
**Pregunta 3**: ¿Cuál fue la tasa de crecimiento instantáneo en el tiempo $x = 2$?

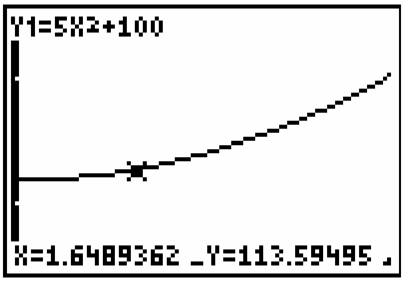
b) **Solución**:

1) Introducir la función $f(x) = 5 \cdot x^2 + 100$

2) Graficar dicha función

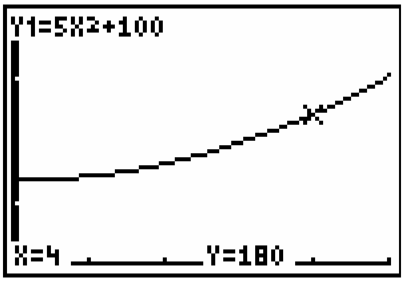
3) Si la pantalla no muestra la gráfica, entonces debe ajustar el [WINDOW], es decir introducir los intervalos para $x$ y para $y$ adecuados, por ejemplo:

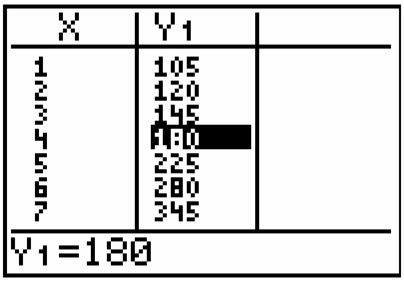



y vemos que la gráfica aparece

4) Una vez que se tiene la gráfica, con la herramienta [CALC] en [2nd] [TRACE] obtenemos el valor de $f(x)$ para los valores de $x = 1,2,3,4,5$. También podemos observar la tabla de valores [2nd] [TABLE].

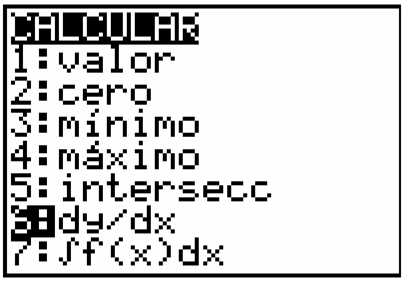


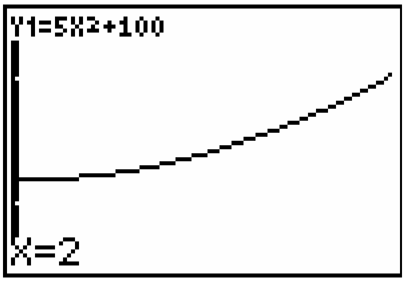



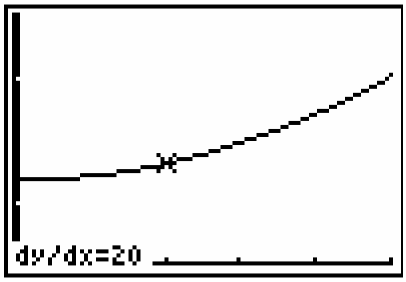
5) Con los valores de $f(2)$ y $f(5)$ obtenidos, calculamos

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(5) - f(2)}{5-2} = \frac{225-120}{3} = 35 \quad \text{millones por año}$$

6) Para encontrar la tasa de crecimiento instantáneo en $x = 2$ calculamos $\frac{dy}{dx}$, tomando períodos de tiempo más cortos que terminan en $x = 2$ y observamos que la tasa de crecimiento promedio tiende a un valor que es la tasa buscada, para lo cual pulsando las teclas [2nd][CALC] y eligiendo la opción 6 y pulsando 2 se comprueba que el valor buscado es $\frac{dy}{dx} = 20$ millones por año.








**2) Solución de un problema de integración**

a) **Enunciado del problema:**

Cuando tiene $x$ años, una cierta maquinaria industrial genera ingresos a un ritmo de

$I(x) = 5.000 - 20 \cdot x^2$, pesos por año y da por resultado unos costos que se acumulan a un ritmo de $C(x) = 2.000 + 10 \cdot x^2$, pesos por año.

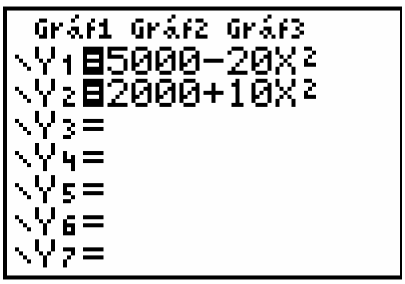
**Pregunta 1**: ¿Cuántos años es provechoso el uso de la maquinaria?

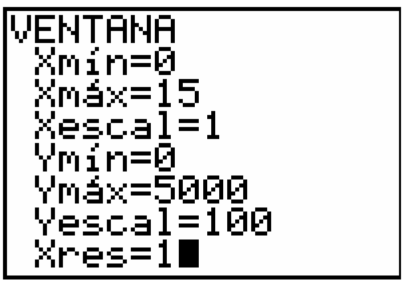
**Pregunta 2**: ¿Cuáles son las ganancias netas totales generadas por la maquinaria durante el período de tiempo de la pregunta 1?

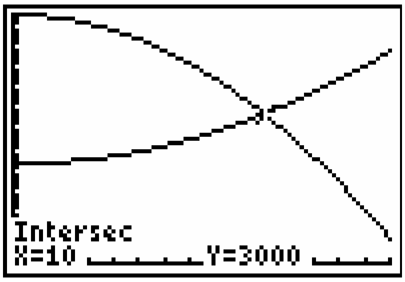
b) **Solución**:

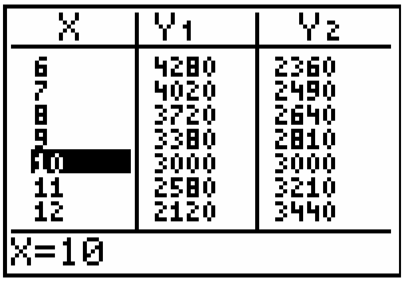
1) Graficar las funciones $I(x)$ y $C(x)$

El uso de la maquinaria será provechoso en tanto que el ritmo al que genera ingresos sea superior al ritmo al que se acumula el costo, esto es, hasta que $I(x) = C(x)$ y resolviendo para $x$, se obtiene $x = 10$, que se puede obtener usando [2nd][CALC] y eligiendo la opción 5 (intersect), entonces puede concluirse que el uso de la maquinaria será provechoso hasta que tenga 10 años. También podemos observar la tabla de valores [2nd] [TABLE].







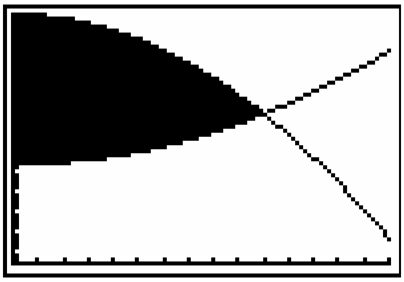



| X | Y1 | Y2 |
|---|---|---|
| 6 | 4280 | 2360 |
| 7 | 4020 | 2490 |
| 8 | 3720 | 2640 |
| 9 | 3380 | 2810 |
| 10 | 3000 | 3000 |
| 11 | 2580 | 3210 |
| 12 | 2120 | 3440 |

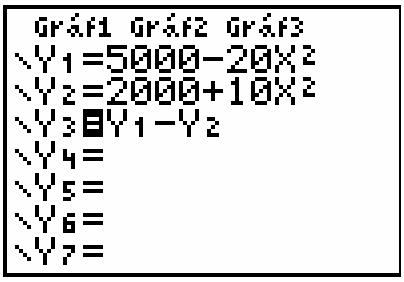
X=10

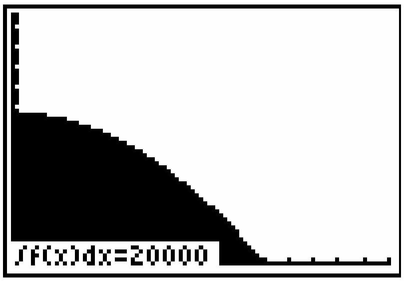
2) Las funciones $I(x)$ y $C(x)$ representan los ritmos de cambio del ingreso y costo totales, respectivamente, y por lo tanto su diferencia, $I(x)-C(x)$ representa el ritmo de cambio de las ganancias netas totales para el período entre $x=0$ y $x=10$, y por lo tanto para obtener las ganancias netas totales integramos en ese intervalo dicha diferencia, que puede interpretarse geométricamente como el área entre las curvas y1 $= I(x)$ e y2 $= C(x)$ desde $x=0$ hasta $x=10$.

3) Dibuja la gráfica que corresponde al enunciado de la parte (2).



4) Dicha integral se puede obtener introduciendo la función $y = I(x)-C(x)$, luego usamos la opción [2nd][CALC] y elegimos la opción 7 (integral) y le damos los límites inferior y superior que son $x=0$ y $x=10$ y obtenemos el valor buscado, que es $\int f(x)dx = 20.000$.




5) ¿Porqué resulta de esta forma la gráfica de la diferencia de $I(x)$ y $C(x)$?

6) ¿Cuáles son los límites necesarios para la integración?

**3) Un Problema de máximos y mínimos.**

a) **Enunciado del Problema:**

El costo total de la producción de $x$ unidades de cierto producto se describe por medio de la función $C(x) = 100.000 + 1.500x + 0.2x^2$, donde $C(x)$ es el costo total expresado en pesos. Determine cuántas unidades de $x$ deberían fabricarse a fin de minimizar el costo promedio por unidad.

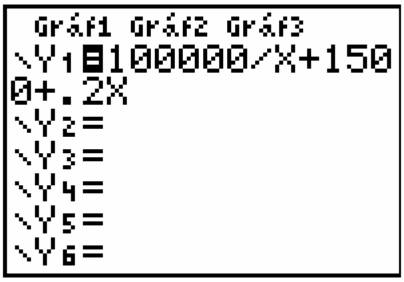
b) **Solución:**

El costo promedio por unidad se calcula dividiendo el costo total entre el número de unidades producidas:

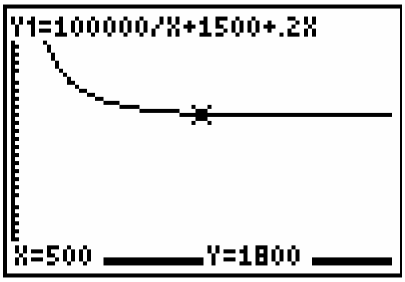
$$C_u = f(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{100.000}{x} + 1.500 + 0.2x$$

1) Graficar la función $C_u$

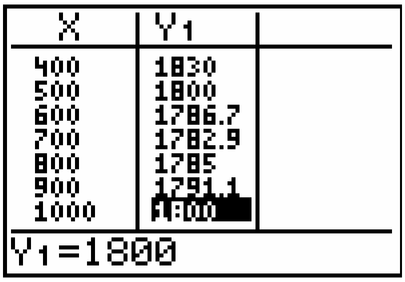
Introducimos la función usando la tecla [Y=] , una vez que se ha hecho esto, observamos el comportamiento de la función, en caso de que no aparezca la gráfica, ajustamos la pantalla con la tecla [WINDOW] seleccionando los intervalos de la siguiente manera: xmin =0, xmax =1000, xscl =10, ymin =0, ymax =3000, yscl =100, y volvemos a pedir la gráfica con la tecla [GRAPH], y después mediante la tecla [TRACE] podemos observar algunos puntos de dicha gráfica.



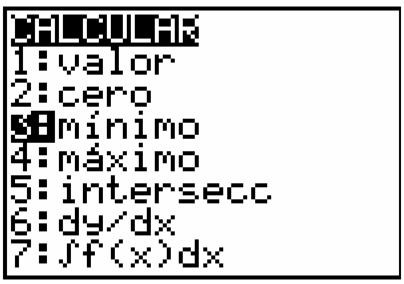


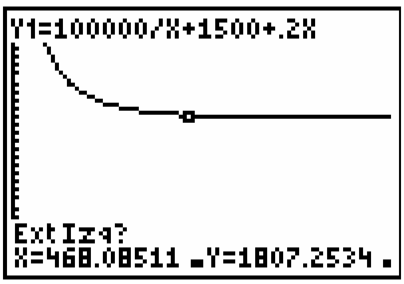


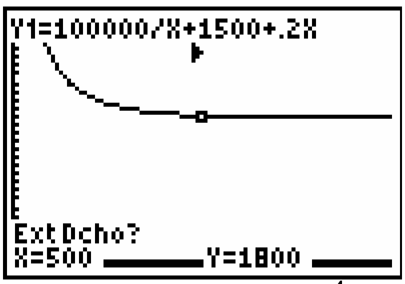

2) Observemos que desde $x = 500$ hasta $x = 700$ aproximadamente, el valor de la función decrece, por lo tanto buscaremos en este intervalo el valor de $x$ para el cual la función tiene un valor mínimo.

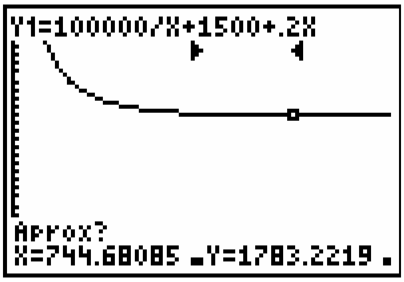


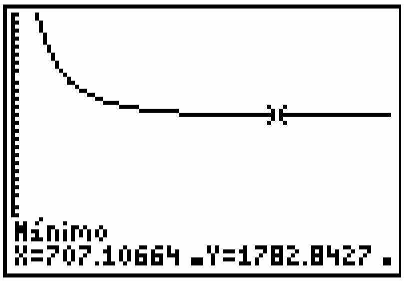

3) Pulsemos las teclas [2nd][CALC] y elegimos la opción 3 (mínimo), pulsamos la tecla [ENTER] y aparecerá en la pantalla la gráfica y se nos pregunta el Ext Izq? [ENTER] y Ext Dcho? movemos el curso y nuevamente [ENTER] pregunta Aprox? [ENTER] y obtenemos el resultado correcto que es $x = 707{,}1$ y el valor de la función es $y = 1782{,}8$.






**4) Un problema de Trigonometría.**

a) **Enunciado del problema:**

Una partícula se desplaza en línea recta de tal manera que si $v \ \dfrac{cm}{s}$ es la velocidad de la partícula a los $t$ segundos, entonces $v = \cos(2 \cdot \pi \cdot t)$ donde el sentido positivo es hacia la derecha del origen. Si la partícula se encuentra $5\,cm$ a la derecha del origen al inicio del movimiento, determinar su posición $\dfrac{1}{3}$ de segundo más tarde.

b) **Solución:**

Sea $S$ $cm$ la distancia dirigida de la partícula desde el origen a los $t$ segundos, ya que $v = \dfrac{dS}{dt}$,

$$\frac{dS}{dt} = \cos(2 \cdot \pi \cdot t)$$

1) $dS = \cos(2 \cdot \pi \cdot t) \cdot dt$ aplicando integración obtenemos:

2) $\int dS = \int \cos(2 \cdot \pi \cdot t) \cdot dt$

3) $S = \dfrac{1}{2\pi} \int \cos(2 \cdot \pi \cdot t) \cdot 2 \cdot \pi \cdot dt$

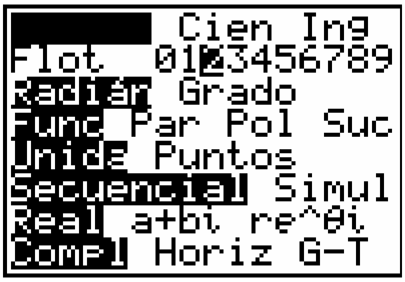
4) $S = \dfrac{1}{2\pi} sen(2 \cdot \pi \cdot t) + c$

5) Puesto que $S = 5$ cuando $t = 0$,

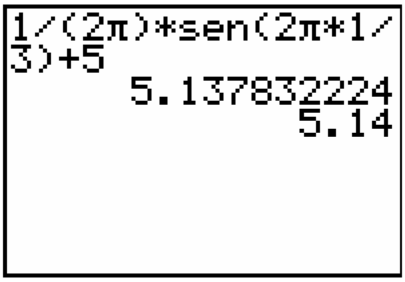
$S = \dfrac{1}{2\pi} sen(2 \cdot \pi \cdot t) + 5$ por lo tanto esta es la ecuación del movimiento

6) Para $t = \dfrac{1}{3}$ entonces $S = \dfrac{1}{2\pi} sen(\dfrac{2}{3}\pi) + 5 = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\sqrt{3}}{2} + 5 \approx 5.14$ de este modo la partícula está 5.14 cm a la derecha del origen $\dfrac{1}{3}$ segundos después de iniciarse el desplazamiento.

c) **Ahora con la calculadora:**




1.- En el paso (5) pulsamos la tecla [MODE], después vas hasta Radián Grado, y activas Radián para poder trabajar la función seno.




2.- Ahora pulsa la tecla [SIN] y aparecerá en la pantalla "Sen(" y enseguida escribes el ángulo para el cual quieres calcular el valor de Seno y pulsas la tecla [ENTER]. En este caso no se está usando grados, por lo tanto dejas activado la opción radian.

3.- La gráfica la puedes obtener tecleando la ecuación (5) en la tecla [Y=] y el valor de $\pi$ lo puedes escribir con [2nd] y la tecla $\pi$, directamente.

4.- Si la gráfica no aparece, asegúrate de ajustar la pantalla con [WINDOW].

5.- Con la tecla trace puedes ver la ecuación de la función y moviéndote con las flechas izquierda y derecha ver los valores de las coordenadas.

6.- ¿A qué distancia sobre el eje X aparece la gráfica de la función?

7.- ¿Por qué parece muy angosta dicha gráfica?

8.- ¿Qué sucede si hacemos variar las dimensiones de la pantalla?