AL4 – MOUVEMENTS DE POPULATION

TI-82 Stats – TI-83 Plus – TI-84 Plus

Mots-clés : matrice, graphe.

1. Objectifs

Utiliser deux registres, matrices et graphes, pour traiter un même problème de répartition de population.

2. Correction et commentaires

Remarque : Cette fiche est une adaptation de l'exemple 1 *des commentaires du programme officiel.*

Partie A : avec les matrices

1) De l'an 0 à l'an 1 :
la capitale comptait 12 000 habitants ;
4 800 habitants l'ont quitté pour aller vivre dans le reste de l'île ($0{,}4 \times 12\,000 = 4\,800$) ;
7 200 habitants sont restés dans la capitale ($0{,}6 \times 12\,000 = 7\,200$) ;
le reste de l'île comptait 12 000 habitants ;
2 400 habitants l'ont quitté pour rejoindre la capitale ($0{,}2 \times 12\,000 = 2\,400$) ;
9 600 habitants sont restés ($0{,}8 \times 12\,000 = 9\,600$) .
La capitale compte donc 7 200 + 2 400 = 9 600 habitants.
Le reste de l'île compte : 4 800 + 9 600 = 14 400 habitants.
Le système $\begin{cases} c_1 = 0{,}6\, c_0 + 0{,}2\, r_0 \\ r_1 = 0{,}4\, c_0 + 0{,}8\, r_0 \end{cases}$ et les conditions initiales permettent d'obtenir : $c_1 = 9\,600$ et $r_1 = 14\,400$.

2) De la même façon, $\begin{cases} c_2 = 0{,}6\, c_1 + 0{,}2\, r_1 \\ r_2 = 0{,}4\, c_1 + 0{,}8\, r_1 \end{cases}$; donc $P_1 = (8\,640 \quad 15\,360)$.

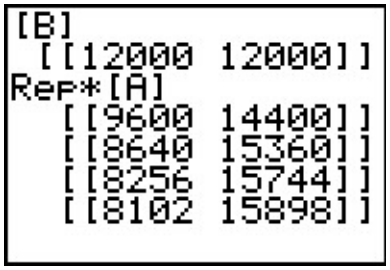
Remarque : on admet la formule de récurrence $\begin{cases} c_{n+1} = 0{,}6\, c_n + 0{,}2\, r_n \\ r_{n+1} = 0{,}4\, c_n + 0{,}8\, r_n \end{cases}$.

3) Dans la calculatrice, on entre les matrices :
$A = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 12\,000 & 12\,000 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 12\,000 \\ 12\,000 \end{pmatrix}$ et l'on effectue les 4 calculs.
Le cas **a)** est impossible car on multiplie une matrice $2 \times \mathbf{2}$ par une matrice $\mathbf{1} \times 2$;
le cas **b)** donne $A \times C = \begin{pmatrix} 12\,000 \\ 12\,000 \end{pmatrix}$;
le cas **c)** semble correct ;
le cas **d)** est impossible car on multiplie une matrice $2 \times \mathbf{1}$ par une matrice $\mathbf{2} \times 2$.
Preuve que le cas 3 est correct :
$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6\,x + 0{,}2\,y & 0{,}4\,x + 0{,}8\,y \end{pmatrix}$

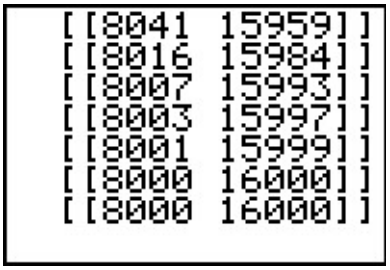
4) Relation : $P_1 = P_0 \times A$; $P_2 = P_1 \times A = (P_0 \times A) \times A = P_0 \times A^2$; … ; $P_{n+1} = P_n \times A$;
et l'on admet $P_n = P_0 \times A^n$.

5) Avec la calculatrice, on peut calculer facilement les populations successives :

On affiche la matrice *B*.
On effectue alors l'opération $B \times A$ (*écran* 1).
On efface l'écran (facultatif) et on obtient les valeurs de l'*écran* 2 en appuyant plusieurs fois sur la touche **ENTER**.



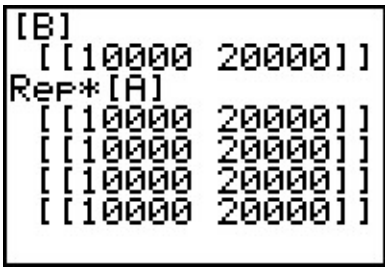
écran 1



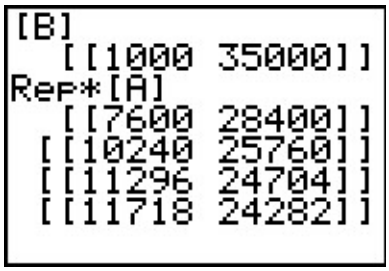
écran 2

Remarque : la calculatrice est en mode **Flott 0**.

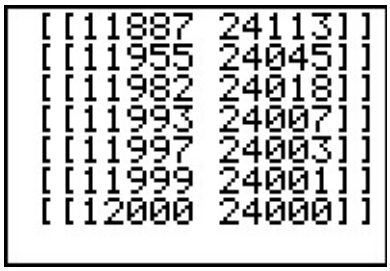
6) Différents point de départ :



écran 3



écran 4



écran 5

Ecran 3 :

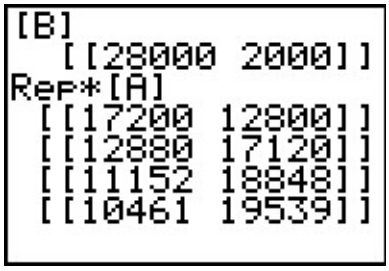
a) $P_0 = \begin{pmatrix} 10\,000 & 20\,000 \end{pmatrix}$

Ecrans 4 et 5 :

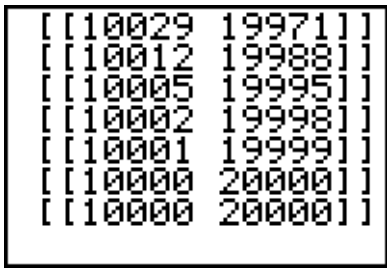
b) $P_0 = \begin{pmatrix} 1\,000 & 35\,000 \end{pmatrix}$

Ecrans 6 et 7 :

c) $P_0 = \begin{pmatrix} 28\,000 & 2\,000 \end{pmatrix}$



écran 6



écran 7

On peut constater que, quel que soit le point de départ, la situation évolue vers une répartition $\frac{1}{3}$ de la population totale dans la capitale et les $\frac{2}{3}$ restants dans le reste de l'île.

Partie B : avec les graphes

1) Ce graphe a 2 sommets *C* et *R*.
La somme des poids des arêtes partant de *C* est égale à 1, ainsi que celle de *R*.
On a donc bien un graphe probabiliste.

		Arrivée	
		C	*R*
Départ	*C*	0,6	0,4
	R	0,2	0,8

2) On définit la matrice de transition :

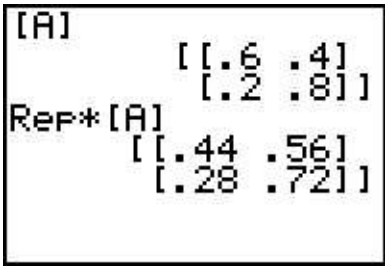
$$M = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}.$$

3) Soit *x* la population de la capitale et *y* la population du reste de l'île.
Si $P = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ est la population stable, on a : $P = P \times M$.

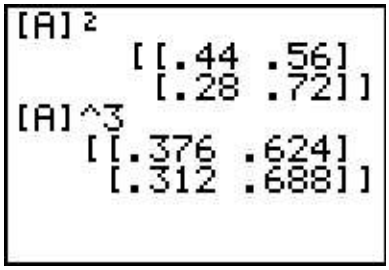
$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0{,}6\,x + 0{,}2\,y \\ y = 0{,}4\,x + 0{,}8\,y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}4\,x = 0{,}2\,y \\ 0{,}2\,y = 0{,}4\,x \end{cases}$, soit $2\,x = y$.

Comme $x + y$ représente la population totale de l'île, la situation stable est obtenue lorsque $\frac{1}{3}$ de la population totale habite la capitale et les $\frac{2}{3}$ restants habitent le reste de l'île.

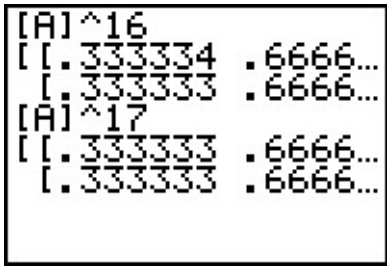
4) 5) Dans la calculatrice, la matrice *M* s'appelle *A*.



écran 8



écran 9



écran 10

La matrice M^n converge vers la matrice $L = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$. On a : $\begin{pmatrix} x & p-x \end{pmatrix} \times \mathrm{L} = \begin{pmatrix} x & p-x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$,

soit : $\begin{pmatrix} x & p-x \end{pmatrix} = (\frac{1}{3}p \;\; \frac{2}{3}p)$.

Annexe

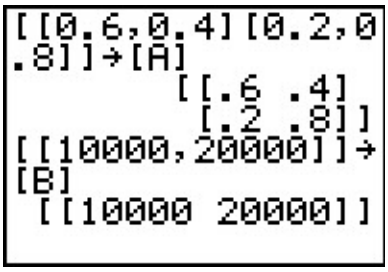
1. Saisir une matrice

Utiliser l'éditeur de matrices est la solution la plus simple. Toutefois, il existe d'autres solutions qui peuvent être utiles, notamment dans un programme.

1) Saisie totale directe

La matrice *A* comporte 2 lignes et 2 colonnes.

La matrice *B* comporte 1 ligne et 2 colonnes.

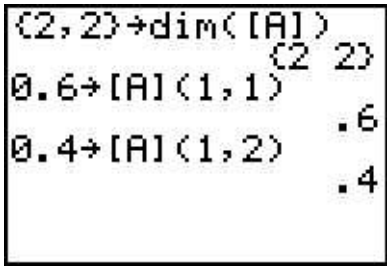


Syntaxe :

- Crochet début de matrice
- Crochet début de ligne
- Eléments séparés par une virgule
- Crochet fin de ligne
- Crochet fin de matrice

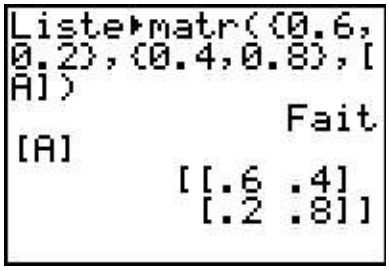
2) Saisie directe coefficient par coefficient

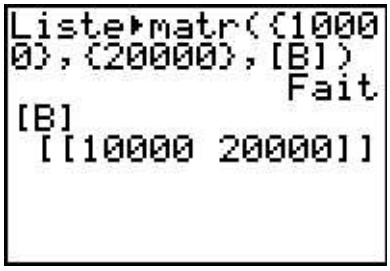
La dimension est donnée sous forme de liste.
Les coefficients sont affectés (ou lus) avec la notation mathématique habituelle.



3) Saisie avec les listes

On peut aussi utiliser la transformation de liste en matrice. Attention, chaque liste représente une **colonne**.



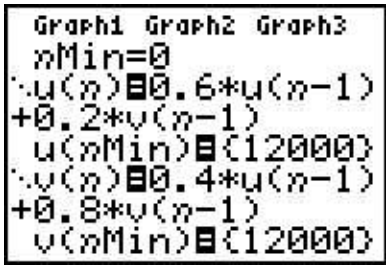


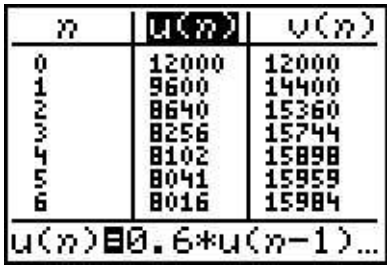
2. Suites à récurrences croisées

On va récrire la formule de récurrence :

$$\begin{cases} c_{n+1} = 0{,}6\, c_n + 0{,}2\, r_n \\ r_{n+1} = 0{,}4\, c_n + 0{,}8\, r_n \end{cases} \quad \text{en} \quad \begin{cases} u_n = 0{,}6\, u_{n-1} + 0{,}2\, v_{n-1} \\ v_n = 0{,}4\, u_{n-1} + 0{,}8\, v_{n-1} \end{cases}.$$

Se mettre en **MODE Suit**, puis saisir les formules dans **Y=**. On visualise les valeurs dans le tableau de valeurs (**2nd [TABLE]** ; réglage de la table : **2nd [TBLSET]**, avec DébTbl = 0, Pas = 1).





n	u(n)	v(n)
0	12000	12000
1	9600	14400
2	8640	15360
3	8256	15744
4	8102	15898
5	8041	15959
6	8016	15984

u(n)=0.6*u(n-1)…