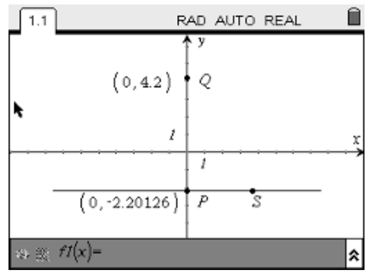
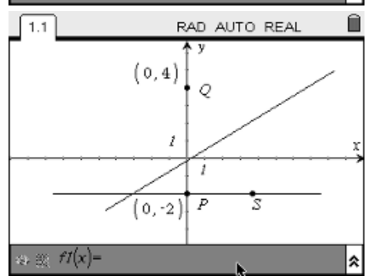
Att upptäcka parabeln

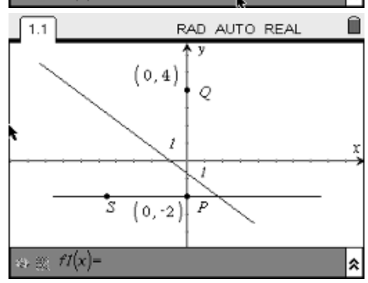
En parabel definieras som mängden av de punkter (orten för punkten), vars avstånd till en given punkt, fokus, är lika stort som deras avstånd till en viss linje, styrlinjen.

I denna övning begränsar vi oss till en styrlinje som är horisontell och ett fokus som ligger på y-axeln.

Några steg på vägen:







- Infoga en Graphs & Geometry applikation. Välj verktyget Point On och placera två punkter på y-axeln. Låt den ena punkten ligga ungefär vid y=4 och den andra vid y=-2.
- Bestäm koordinaterna för dessa båda punkter. Konstruera en linje vinkelrät mot y-axeln genom punkten med y-koordinaten ungefär -2. Denna linje ska fungera som styrlinje.
- Placera en punkt, S, på den räta linjen y=-2, t ex i fjärde kvadranten.
- Redigera sedan de båda y-koordinaterna så att den ena blir y=4 och den andra y=-2.
  Punkten (0 ; 4) ska fungera som fokus.
- Konstruera nu en mittpunktsnormal till sträckan mellan punkten S och fokus, Q i bilden. Alla punkter på denna mittpunktsnormal uppfyller kravet att avståndet till punkten Q är detsamma som avstånet till punkten S. Alltså finns det speciellt en punkt på linjen vars vinkelräta avstånd till styrlinjen är detsamma som avståndet till punkten Q, fokus. Denna punkt är av speciellt intresse.
  Flytta nu punkten S längs styrlinjen för att observera hur mittpunktsnormalen förändras.
- Bestäm nu orten för mittpunktsnormalen då punkten S på styrlinjen flyttas. Använd Locus-verktyget (menu, Construction, Locus). Klicka först på mittpunktsnormalen sedan på punkten på styrlinjen.
- Anpassa en kurva till den mängd av mittpunktsnormaler, som dyker upp. Gör detta genom att skriva in funktionen x^2 som f1(x) och flytta och forma denna så att du får en god anpassning till linjerna, dvs så att kurvan tangerar linjerna så bra som möjligt. Vilket blir ditt funktionssamband?
- Infoga en sida med en Calculatorapplikation och teckna avstånden från en godtycklig punkt (x ; y) dels till styrlinjen dels till fokus. Sätt sedan dessa avstånd lika och lös ut y. Hur stämmer detta funktionssamband överens med det du tog fram i Graphs & Geometry applikationen?

Matematisk nivå

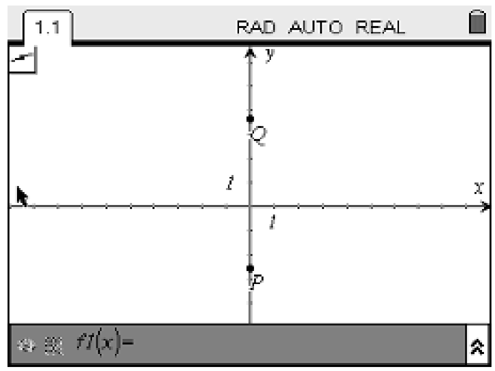
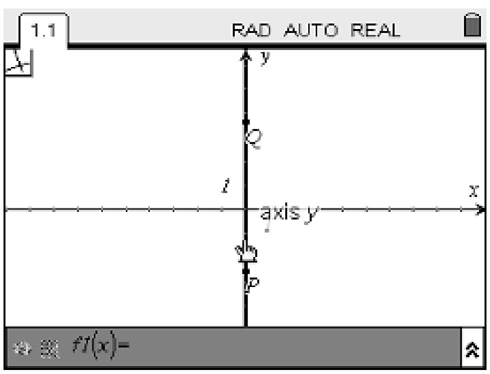
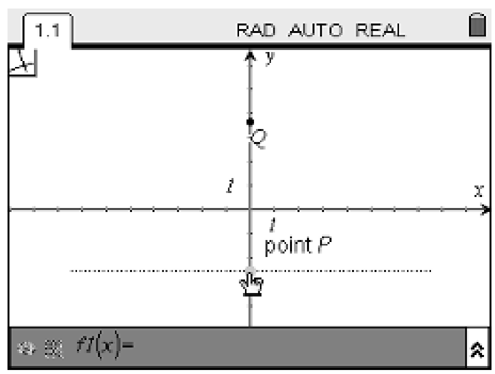
Kunskaper motsvarande matematik kurs B.

Teknisk nivå

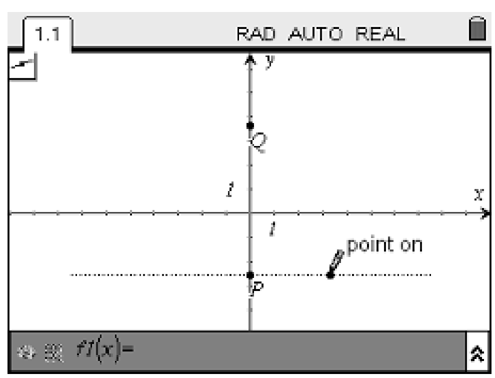
Tidigare erfarenhet av TI-Nspire är nödvändig om inte läraren styr övningen.

Läraranvisning:

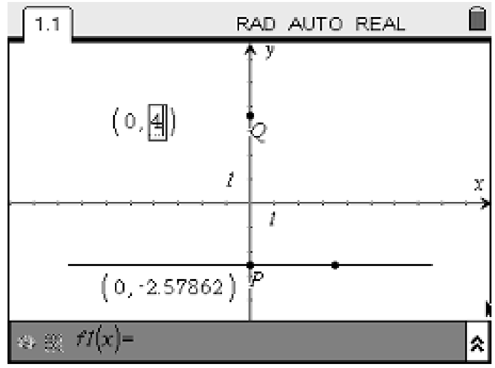
<table>
<tr>
<td>Placera två punkter, P och Q, på y-axeln (menu, Points & Lines, Point On).

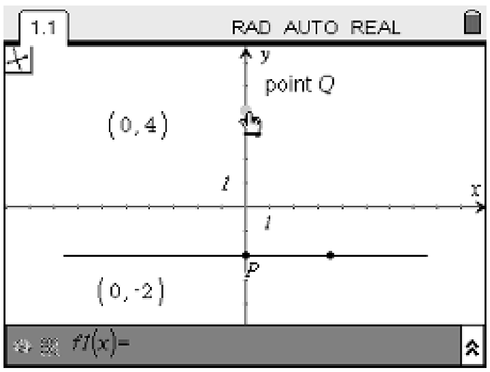
Konstruera sedan en linje vinkelrät mot y-axeln genom punkten P (menu, Construction, Perpendicular). Klicka först på y-axeln sedan på punkten P. Se bilderna nedan. Denna linje ska fungera som styrlinje. Punkten Q ska vara fokus.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Placera en punkt på styrlinjen (menu, Points & Lines, Point On).

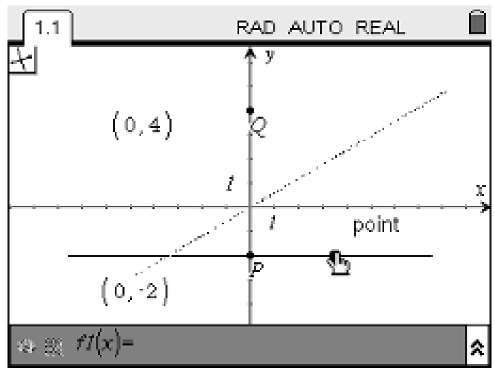
Bestäm koordinaterna för punkterna P och Q (menu, Actions, Coordinates & Equations).

Redigera de båda y-koordinaterna så att koordinaterna blir (0;4) och (0;-2). Detta sker genom att i tur och ordning klicka på y-koordinaterna så att en box ritas runt värdet. Nu kan värdet redigeras. Se bild på nästa sida.</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Konstruera mittpunktsnormalen till sträckan mellan Q och punkten på styrlinjen (menu, Construction, Perpendicular Bisector). Klicka på de båda punkterna i godtycklig ordning. Se de båda bilderna nedan.

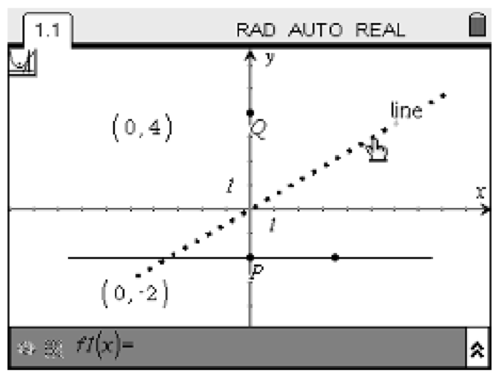


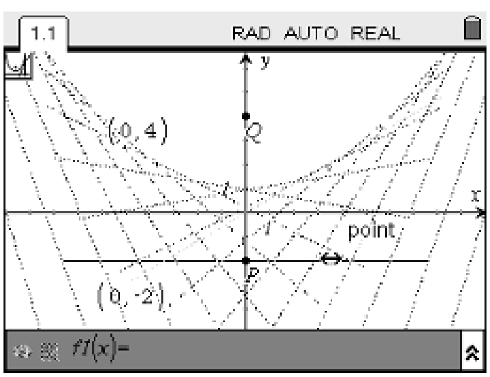


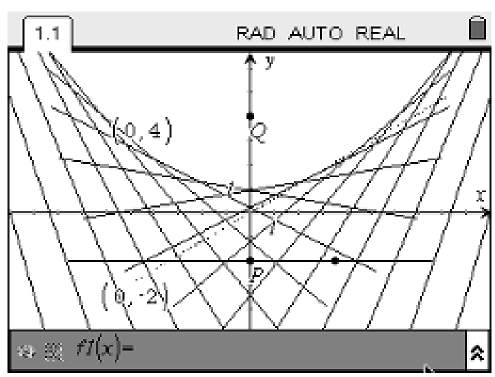


Flytta punkten på styrlinjen för att observera hur mittpunktsnormalen, dvs tangenten till ortskurvan, ändrar sitt läge.

Bestäm sedan orten för mittpunkts-normalen då punkten flyttas (menu, Construction, Locus). Klicka först på linjen sedan på punkten. Se de tre bilderna intill och nedan.



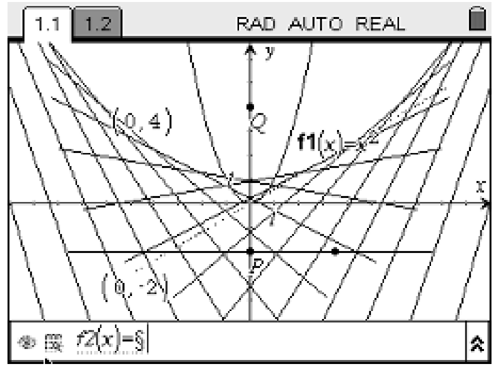


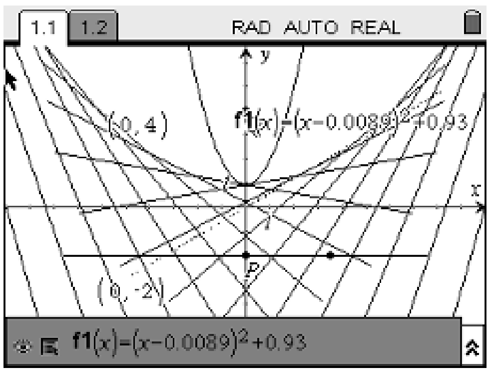


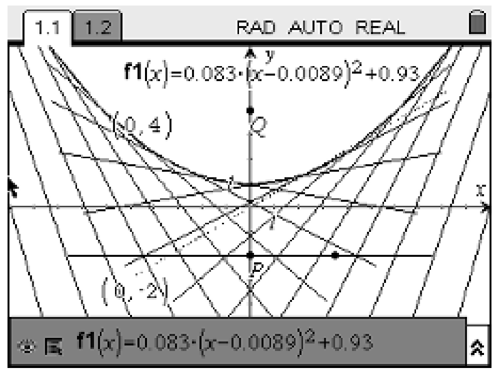
Klicka i inmatningsraden och skriv in funktionen x^2 som f1(x) och tryck enter.

Flytta kurvan uppåt genom att föra markören över minimipunkten och använda greppverktyget att ”lyfta den”.

Ändra så kurvans ”branthet” genom att fatta i ett av kurvans ”ben” och dra utåt till önskat resultat. Se de båda bilderna nedan.

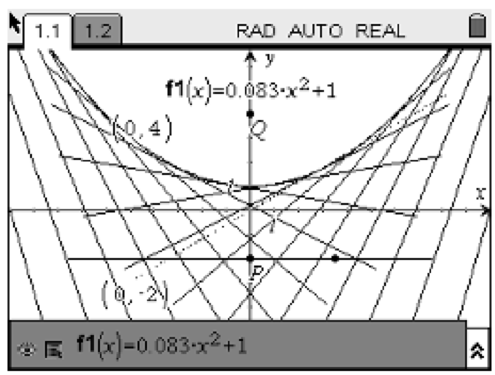






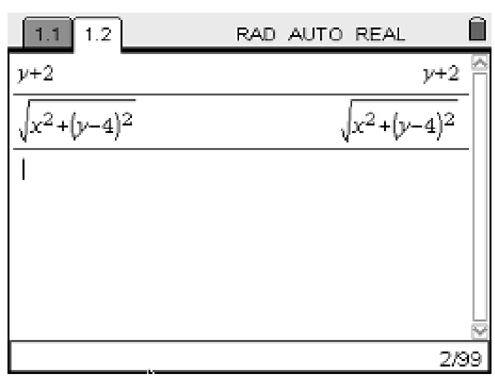
Redigera avslutningsvis funktions-uttrycket antingen på inmatningsraden eller genom att klicka i sambandet i koordinatsystemet, för att få bättre anpassning.

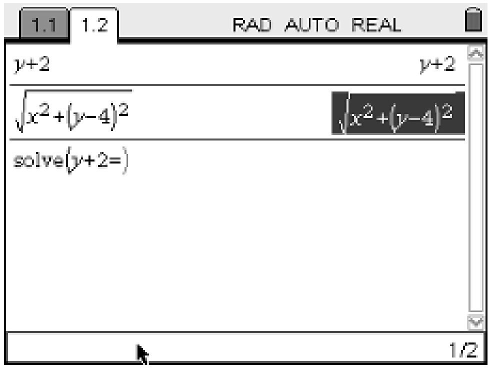
Resultatet framgår av bilden till höger.

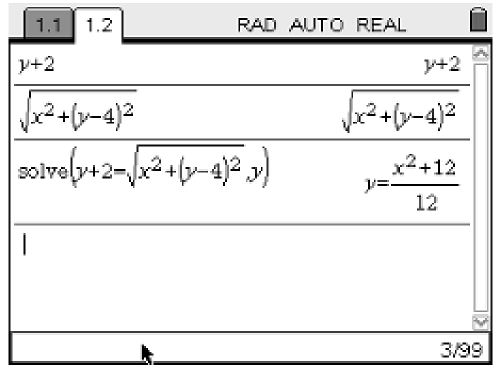


Nu infogas en Calculator-applikation och avståndet från en godtycklig punkt (x;y) till styrlinjen och till fokus tecknas. Sedan sätts dessa båda avstånd lika och variabeln y löses ut med hjälp av Solve-kommandot (menu, Algebra, Solve).

Se bilden till höger och bilder på följande sida.

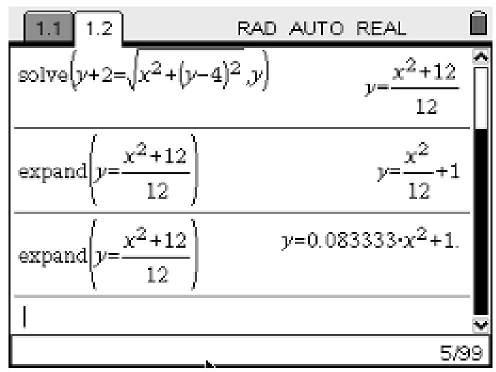






För att enklare kunna jämföra detta uttryck med det föregående, experimentellt framtagns, utvecklas det (menu, Algebra, Expand) och sedan bestäms ett närmevärde genom att trycka på ctrl följt av enter.

Som framgår är överensstämmelsen god.



Utvidgning

Studera vad som händer om styrlinjens läge ändras eller om fokus flyttas.

Som en utvidgning kan duktiga elever studera en godtycklig, fortfarande horisontell, styrlinje $y = y0$ och ett fokus i punkten $(x1; y1)$.

Vad som händer om styrlinjen inte är horisontell kan vara ytterligare en utmaning för de duktigaste eleverna.