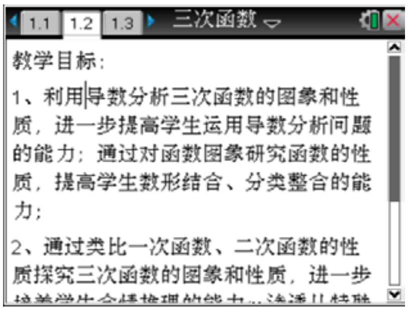
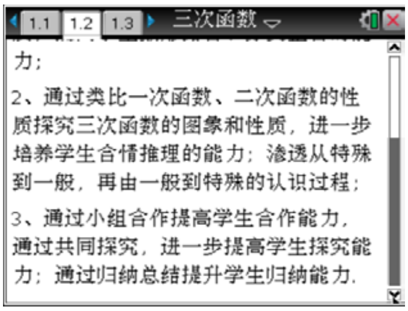
三次函数的探究及其简单应用

龙御妹

【教学目标】

- 利用导数分析三次函数的图象和性质，进一步提高学生运用导数分析问题的能力；通过对函数图象研究函数的性质，提高学生数形结合、分类整合的能力；
- 通过类比一次函数、二次函数的性质探究三次函数的图象和性质，进一步培养学生合情推理的能力；渗透从特殊到一般，再由一般到特殊的认识过程；
- 通过小组合作提高学生合作能力，通过共同探究，进一步提高学生探究能力；通过归纳总结提升学生归纳能力.





【教学重点】三次函数图象和性质的探究

【教学难点】对三次函数的系数多个参数的讨论，各参数对函数图象和性质的影响，利用 TI 图形计算器和小组合作探究讨论形式化解难点.

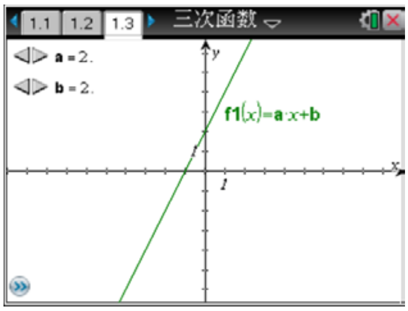
【教学用具】

- TI 图形计算器；
- 计算机（几何画板）

【教学过程】

一、回顾联想：

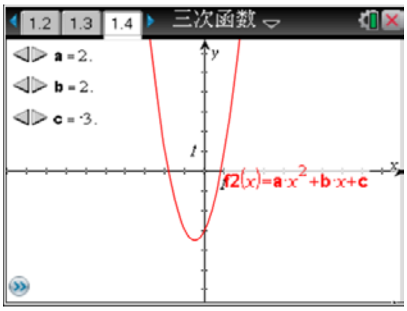
看表格一和图形计算器程序 1.3 页，我们曾经研究过一次函数：$y = ax + b(a \neq 0)$，回顾 a, b 对函数图象和性质的影响；



（点击◀ ▶调节游标 a, b 值的大小）

二次函数： $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$，回顾 a,b,c 对函数图象和性质的的影响。——————5 分钟

转到 1.4 页，利用图形计算器的演示，带着学生回顾一次二次函数的图象和性质，从函数的定义域、奇偶性、单调性、值域、对称性、零点、极值点、纵截距等方面进行归纳，从而引出三次函数.

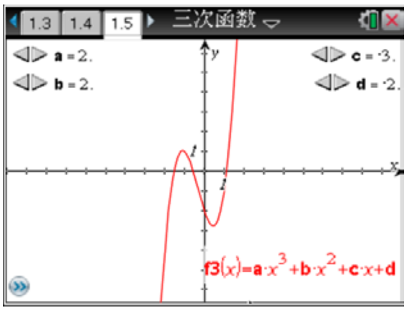


（点击◀ ▶调节游标 a, b, c 值的大小）

二、引入探究：

1、三次函数定义：形如 $y=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq 0)$ 的函数我们称为三次函数.

2、下面研究三次函数的性质和图象，a,b,c,d 对函数图象和性质有何影响呢？



（点击◀ ▶调节游标 a, b 值的大小）

分析：参数中哪一个好研究？其它的参数可以影响到函数的那些性质？

利用表格二和图形计算器程序 1.5 页，小组讨论探究三次函数在定义域、奇偶性、单调性、值域、零点、极值点、对称性方面进行讨论，小组讨论快的组还可以自己开发探究内容。利用 TI 辅助猜想验证，分析三次函数图象的大致趋势有哪些？如何分类？

————小组合作讨论 10 分钟

————小组归纳总结 10 分钟

三、归纳总结：

1、知识层面；

（1）关键点：函数与 x,y 轴的交点；函数的极值点等

（2）函数图像的整体走势：定义域、值域、奇偶性、单调性、周期性等性质；无穷远处函数的取值趋势。用图像作为我们思维的引导，可以帮助我们更好地解决函数相关问题。

2、思想方法层面：

（1）利用导数作为工具进行函数性质的探究；

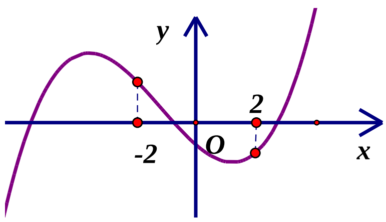
（2）合理确定分类点，恰当分类整合

3、应用：函数探究的内容可以拓展到函数对应的方程的根的个数，进而拓展到直线和抛物线与三次函数图象交点的个数，进一步还可以拓展到不等式解集形式的探究，过一点的直线与三次函数相切的切线条数的探究.

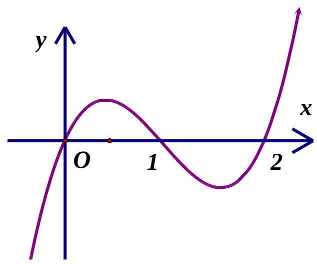
【练习】

1、判断下列三次函数 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d(a \neq 0)$ 各图象中的 a,b,c,d 的符号：BDCA

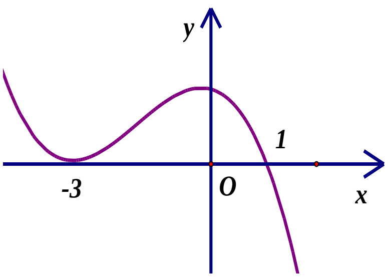
（1）______（2）______（3）______（4）______



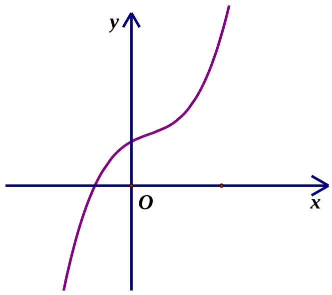
（1）



（2）



（3）



（4）

A $\begin{matrix} a>0 \\ b<0 \\ c>0 \\ d>0 \end{matrix}$	B $\begin{matrix} a>0 \\ b>0 \\ c<0 \\ d<0 \end{matrix}$	C $\begin{matrix} a<0 \\ b<0 \\ c=0 \\ d>0 \end{matrix}$	D $\begin{matrix} a>0 \\ b<0 \\ c>0 \\ d=0 \end{matrix}$

2、若函数 $f(x) = ax^3 + 3x^2 + ax - 5$，在 R 上为单调函数，则 a 的取值范围为____________.

答案：$[-\sqrt{3}, 0) \cup (0, \sqrt{3}]$

3、讨论方程 $x^3 - 3x + k = 0$ 的根的个数.

变式：讨论方程 $x^3 - 3x + k = 0$ 在[-2,2]上的根的个数

变式：当 $x \in (-3, +\infty)$ 时，方程 $x^3 - 3x + k = 0$ 有唯一解，求 k 的取值范围

若改为 $x \in [0, 2]$ 呢？

4、 若函数 $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$ 是 **R** 上的增函数，则函数 $f(x)$ 的图象的对称中心为

∵$f(x)$是 **R** 上的单调函数，∴$f'(x) \geqslant 0$，对 $x \in$ **R** 恒成立，

即 $3x^2-2(a+b+c)x+(ab+bc+ca) \geqslant 0$ 对 $x \in$ **R** 恒成立.

∴$\triangle \leqslant 0$, $4(a+b+c)^2-12(ab+bc+ca) \leqslant 0$，

∴ $(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2 \leqslant 0$，∴ $a=b=c$.

∴ $f(x)=(x-a)^3$ ， ∴$f(x)$关于点$(a, 0)$对称.

证明如下：设点 P(x, y)是 $f(x)=(x-a)^3$ 图像上的任意一点，$y=(x-a)^3$，

点 P 关于点$(a, 0)$对称的点 P′ $(2a-x, -y)$，

∵$(2a-x-a)^3=(2a-x)^3=-(x-2a)^3=-y$ ，

∴点 P′ 在函数 $f(x)=(x-a)^3$ 的图像上，即函数 $f(x)=(x-a)^3$ 关于点$(a，0)$对称．

5、已知函数 $f(x)=x^3-x^2-x$，若存在 $x_0\in(a,a+3)$ 使得 $f(x)\ge f(x_0)$

对一切 $x\in(a,a+3)$ 都成立，求 a 的取值范围。$(-1\le a<1)$

6、函数 $f(x)=x^3+3x(x\in R)$,若 $f(mx^2)+f(1-mx)>0$ 恒成立,求实数 m 的取值范围 .

解：由 $f'(x)=3x^2+3\ge3>0$，得 $x\in(-\infty,+\infty)$, $f'(x)>0$, $f(x)$ 单调递增；

又 $x\in(-\infty,+\infty)$, $-x\in(-\infty,+\infty)$, $f(-x)=(-x)^3+3(-x)=-x^3-3x=-f(x)$，

所以 $f(x)$ 是奇函数．∵ $f(mx^2)+f(1-mx)>0$, ∴ $f(mx^2)>-f(1-mx)=f(mx-1)$，

∵ $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增， ∴ $mx^2>mx-1$ 恒成立，即：∴ $mx^2-mx+1>0$ 恒成立，分类：①当 $m=0$时,$1>0$ 恒成立， $m=0$ 适合；

②当 $m\ne0$, $mx^2-mx+1>0$ 恒成立 $\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\ \Delta=m^2-4m<0\end{cases}$ 解得： $0<m<4$;

综上， $0\le m<4$

  Author:龙御妹

实验报告二

探究：三次函数的图象和性质

表格一：回顾一次函数和二次函数的图象和性质

	一次函数 $y=ax+b(a\neq 0)$		二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$	
函数图象				
定义域				
奇偶性				
值域				
单调性				
极值点				
零点				
纵截距				
对称性				
参数对函数图象和性质的影响				

表格二：探究三次函数 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d(a \neq 0)$ 的图象和性质

定义域				
奇偶性				
图象				
值域				
单调性				
极值点				
极值点与参数关系				
零点				
纵截距				
对称性				
参数对函数图象和性质的影响				

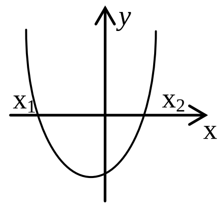
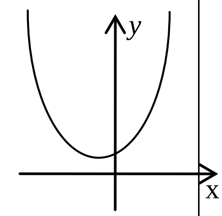
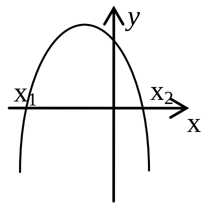
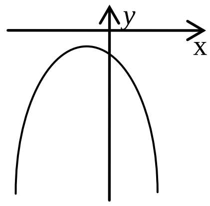
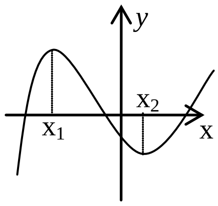
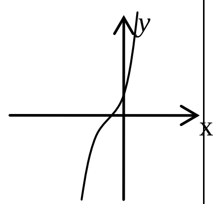
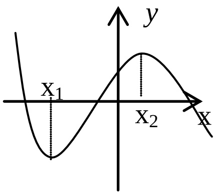
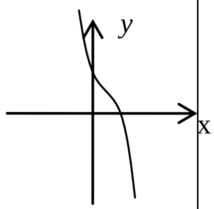
实验报告二

探究：三次函数的图象和性质

表格一：回顾一次函数和二次函数的图象和性质

	一次函数 $y=ax+b(a\neq 0)$		二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$	
函数图象				
定义域				
奇偶性				
值域				
单调性				
极值点				
极值点与参数的关系				
零点				
纵截距				
对称性				
参数对函数图象和性质的影响				

表格二：探究三次函数 $y=ax^3+bx^2+cx+d\,(a\neq 0)$ 的图象和性质

	$a>0,\Delta>0$	$a>0,\Delta\le 0$	$a<0,\Delta>0$	$a<0,\Delta\le 0$
定义域	R			
奇偶性	$b=d=0\Leftrightarrow$ 函数为奇函数			
导函数图象				
图象				
值域	R			
单调性	增区间为 $(-\infty,x_1),(x_2,+\infty)$；减区间为 (x_1,x_2)	在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增	增区间为 (x_1,x_2)；减区间为 $(-\infty,x_1),(x_2,+\infty)$	在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递减
极值点	x_1,x_2	无	x_1,x_2	无
极值点与参数的关系	$x_1+x_2=-\dfrac{2b}{3a},x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{3a},$		$x_1+x_2=-\dfrac{2b}{3a},x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{3a},$	
零点	$f(x_1)<0$或$f(x_2)>0$ 时，1 个交点； $f(x_1)=0$或$f(x_2)=0$ 时 2 个交点； $f(x_2)<0<f(x_1)$ 时 3 个交点	1 个	$f(x_1)>0$或$f(x_2)<0$ 时，1 个交点； $f(x_1)=0$或$f(x_2)=0$ 时 2 个交点； $f(x_1)<0<f(x_2)$ 时 3 个交点	1 个
纵截	d			

距	
对称性	关于点 $(-\frac{b}{3a}, f(-\frac{b}{3a}))$ 对称
参数对函数图象和性质的影响	（1）$a>0$：函数图象两边增； $a<0$：函数图象两边减； （2）$b^2-3ac>0$：为双峰函数； $b^2-3ac\le 0$：为单调函数；

  Author:龙御姝