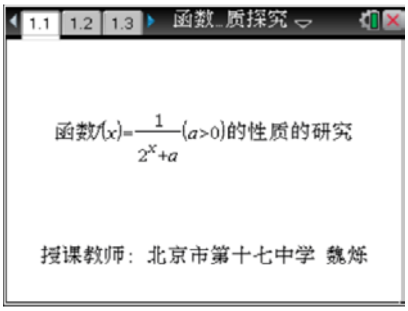
课题：函数 $f(x)=\dfrac{1}{2^x+a}(a>0)$ 的性质探究

授课教师：北京市第十七中学 魏烁

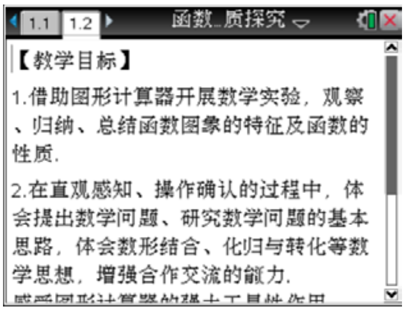


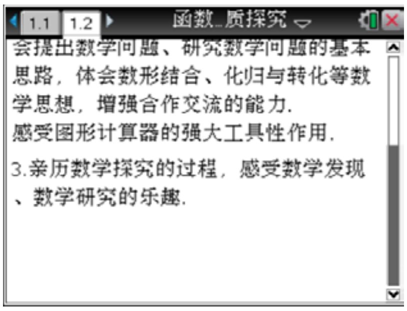
【教学目标】

1. 借助图形计算器开展数学实验，观察、归纳、总结函数图象的特征及函数的性质.

2. 在直观感知、操作确认的过程中，体会提出数学问题、研究数学问题的基本思路，体会数形结合、化归与转化等数学思想，增强合作交流的能力.。感受图形计算器的强大工具性作用。

3. 亲历数学探究的过程，感受数学发现、数学研究的乐趣。





【教学重点】函数 $f(x)=\dfrac{1}{2^x+a}(a>0)$ 性质的探究

【教学难点】函数图象中心对称性的证明

【教学方法】教师启发引导，学生自主探究与动手实践相结合

【教学手段】图形计算机

【教学工具】

- Internet Access
- TI-nspire CAS 文件 - 函数性质探究.tns
- TI-nspire CAS

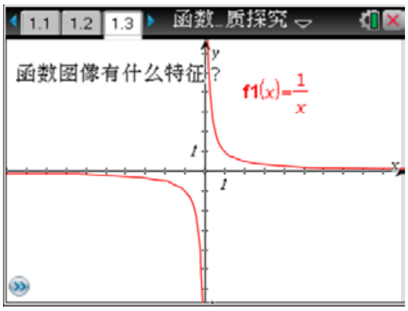
【教学过程】

我们知道函数是描述客观世界变化规律的重要数学模型，在生活中的应用也非常广泛，因此研究函数的性质是必要的.那么我们一般从哪些角度研究函数的性质呢？

函数图象是函数的一种表示形式，形象的显示了函数的性质，为我们研究数量关系提供了“形”的直观，

今天，我们一起探究一类新函数的图象及其性质。

一、 问题驱动，引入新课



首先我们回顾一下反比例函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的图象，它的图象有什么特征？

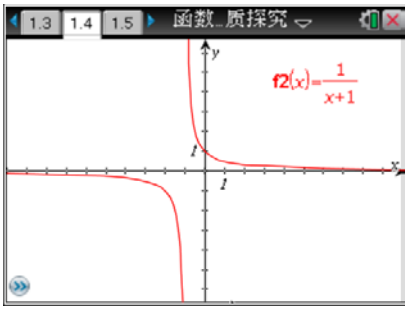
结论：

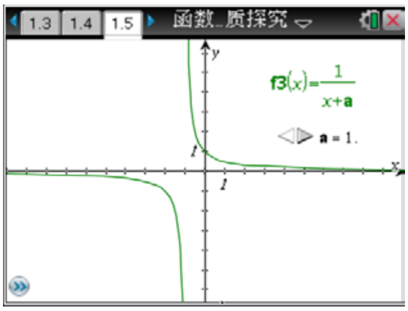
1. 对称性（以原点为对称中心）；

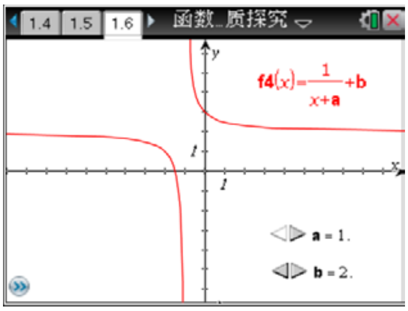
2. 以坐标轴为渐近线；

3. 在区间 $(-\infty,0),(0,+\infty)$ 单调递减。

二、类比推广，归纳猜想







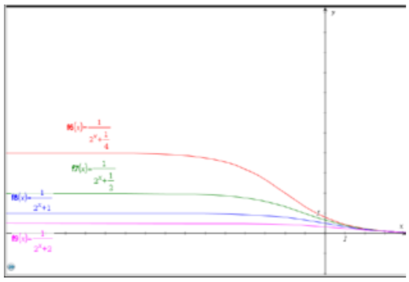
（点击◀ ▶来调整游标的数值；CTRL+◀ 或 ▶来换页）

1. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ 具有上述性质吗？

2. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x+a}(a\neq 0)$ 具有上述性质吗？

3. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x+a}+b(a\neq 0)$ 具有上述性质吗？

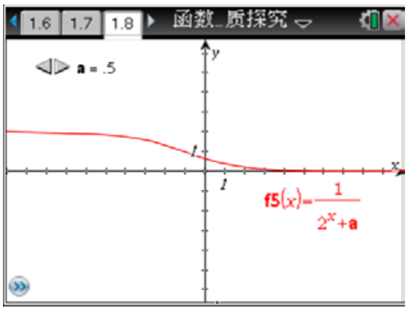
4. 猜想：函数 $f(x)=\dfrac{1}{2^x+a}(a>0)$ 也具有上述三个性质吗？



探究：函数 $f(x)=\dfrac{1}{2^x+a}(a>0)$ 是否具有类似的性质？并具体描述性质内容。

学生利用图形计算器的作图功能、动态演示功能，展开数学实验. 通过直观感知、操作确认发现函数图象的性质，初步感受数学研究的基本套路，同时提高合作交流的能力，享受与他人分享

数学成果的快乐.。教师将在小组间巡视，或帮助指导有需要的学生，或加入小组讨论，发挥学生的指导者、实验的参与者的作用。



（点击◀ ▶来调整游标的数值；CTRL+◀ 或 ▶来换页）

$f(x)=\frac{1}{2^x+a}(a>0)$	渐近线	对称中心
$a=\frac{1}{4}$	$y=0, y=4$	(,2)
$a=\frac{1}{2}$	$y=0, y=2$	(,1)
$a=1$	$y=0, y=1$	(,$\frac{1}{2}$)
$a=2$	$y=0, y=\frac{1}{2}$	(,$\frac{1}{4}$)
⋮	⋮	⋮

1. $f(x)$ 图象以直线 $y=0$ 和 $y=\frac{1}{a}$ 为渐近线；

2. 对称中心是 $(log_2 a, \frac{1}{2a})$；

3. $f(x)$ 是 R 上的减函数。

三、思辨论证、提升认识

理论证明：

分析：设对称中心为点 $M(\log_2 a, \frac{1}{2a})$，点 $C(x,y)$ 是函数图象上任意一点，若函数 $y=f(x)$ 的图象以 M 为对称中心，则点 $C(x,y)$ 关于点 M 的对称点 $C'(x',y')$ 也在函数 $y=f(x)$ 的图象上. 即点 M 是点 $C(x,y)$ 和 $C'(x',y')$ 的中点 .

则应有 $x+x'=2\log_2 a$， $y+y'=2\times\frac{1}{2a}=\frac{1}{a}$

证明： $y+y'=f(x)+f(2\log_2 a-x)=\frac{1}{2^x+a}+\frac{1}{2^{2\log_2 a-x}+a}$

$$=\frac{1}{2^x+a}+\frac{2^x}{2^{2\log_2 a}+a\cdot 2^x}$$

$$=\frac{1}{2^x+a}+\frac{2^x}{2^{\log_2 a^2}+a\cdot 2^x}$$

$$=\frac{1}{2^x+a}+\frac{2^x}{a^2+a\cdot 2^x}$$

$$=\frac{1}{2^x+a}+\frac{2^x}{(a+2^x)a}$$

$$=\frac{2^x+a}{(a+2^x)a}$$

$$=\frac{1}{a}.$$

所以 $f(x)=\dfrac{1}{2^x+a}(a>0)$ 的对称中心是 $(\log_2 a,\dfrac{1}{2a})$.

四、拓展引申、激发兴趣

$$f(x)=\frac{1}{x}\to f(x)=\frac{1}{x+1}(a\neq 0)\to f(x)=\frac{1}{x+a}(a\neq 0)\to$$

$$f(x)=\frac{1}{x+a}+b(a\neq 0)\to f(x)=\frac{1}{2^x+a}(a>0)\to\cdots\to f(x)=\frac{C\cdot a^x+D}{A\cdot a^x+B}$$

五、归纳小结、形成方法

1.我们是如何提出研究问题的?

2.探究过程中，我们用到了怎样的研究方法?

3.在探究过程中，应注意些什么？

4.谈谈你的收获与感悟.

老师总结：我们借助 TI 图形计算器研究了一类函数的图象性质，在这个过程中，我们对数形结合思想、化归与转化思想有了进一步的认识，并且对如何提出新问题、探究新问题有了初步的体会。

探究过程中，采用的归纳类比的研究方式为我们提供数学发现的机会以及研究的方向，但它得到的结论并不一定正确. 例如著名的费马猜想：形如 $2^{2^n}+1(n\in N^*)$ 的数都是质数，后来被欧拉发现第 5 个费马数不是质数，从而推翻了费马的猜想.因此猜想得到的结论还需要严格的逻辑证明。

有兴趣的同学可以搜索资料，查一查哪些著名的数学猜想曾经被推翻过，哪些已经被证明？这些数学猜想是如何提出的，又经历了怎样的探究过程？希望同学们再接再厉，发现更多更有价值的数学问题，毕竟提出问题比解决问题更重要！