EP 039–2008 : Cercles et similitudes

Auteur du corrigé : François Texier **TI-Nspire™ CAS**

***Avertissement** : ce document a été réalisé avec la version 1.4 ; il est disponible dans sa version la plus récente sur notre site http://education.ti.com/france, menu Ressources pédagogiques.*

Fichier associé : EP039_2008_Cercles_CAS.tns

1. Le sujet

Sujet 039 de l'épreuve pratique 2008 – Cercles et similitudes

Enoncé

On considère un triangle équilatéral direct $O_1\ O_2\ O_3$, le milieu O du segment $[O_1\ O_2]$ et le cercle de $\mathcal{C}$ de centre O_1 passant par O. On note A un point du cercle $\mathcal{C}$ distinct du point O. Pour tout point M du cercle $\mathcal{C}$, on note M_1 le point symétrique de M par rapport à O puis M' le point tel que le triangle $MM_1\,M'$ soit équilatéral direct.

Étude expérimentale

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, construire le triangle $O_1\ O_2\ O_3$, placer le point O et tracer le cercle $\mathcal{C}$.
2. Le point A étant construit sur le cercle $\mathcal{C}$, construire le point A' associé au point A par le procédé indiqué dans le préambule.
3. Placer un autre point, noté M, sur le cercle $\mathcal{C}$ et construire le point M' associé à ce point. Visualiser la courbe (ou lieu) que semble décrire le point M' lorsque le point M décrit le cercle $\mathcal{C}$ et émettre une conjecture à ce propos.
4. Lorsque les points M et A sont distincts, les droites (AM) et $(A'M')$ se coupent en un point P. Placer le point P sur la figure. Émettre une conjecture concernant le lieu décrit par le point P lorsque le point M décrit le cercle $\mathcal{C}$ privé du point A.

Démonstrations

5. Montrer qu'il existe une similitude directe de centre O par laquelle le point M du cercle $\mathcal{C}$ a pour image le point M'. Préciser l'angle et le rapport de cette similitude.
6. Déterminer le lieu du point M' lorsque le point M décrit le cercle $\mathcal{C}$.
7. Préciser le lieu du point P lorsque le point M décrit le cercle $\mathcal{C}$ privé du point A.

Production demandée

- Réalisation d'une figure avec un logiciel de géométrie dynamique.
- Réponse argumentée pour les questions **5.** et **6.**
- Informations obtenues concernant le point P.

Compétences évaluées

- **Compétences TICE**
  - Construire une figure avec un logiciel de géométrie dynamique.
  - Visualiser un lieu de points.
- **Compétences mathématiques (spécialité)**
  - Connaître les propriétés des similitudes.
  - Reconnaître et utiliser une configuration usuelle.

2. Corrigé

Les écrans qui figurent dans ce corrigé sont obtenus à partir de la calculatrice.

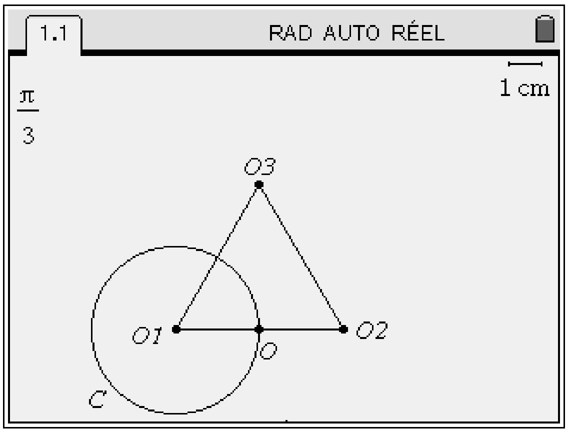
Étude expérimentale

.**1)** Ouvrir une page **Graphique & géométrie**.

Demander l'affichage du **Plan géométrique.**

Tracer le **Segment** $[O_1O_2]$, le nommer à la volée.

Avec **Texte** faire apparaître dans un coin de la fenêtre le nombre $\frac{\pi}{3}$.



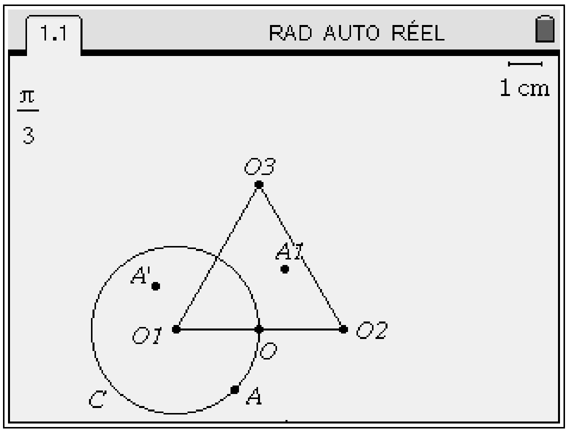
Construire O_3 comme image de O_2 par la **Rotation** de centre O_1 et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Tracer le **Triangle** $O_1O_2O_3$ puis construire le **Milieu** O de $[O_1O_2]$.

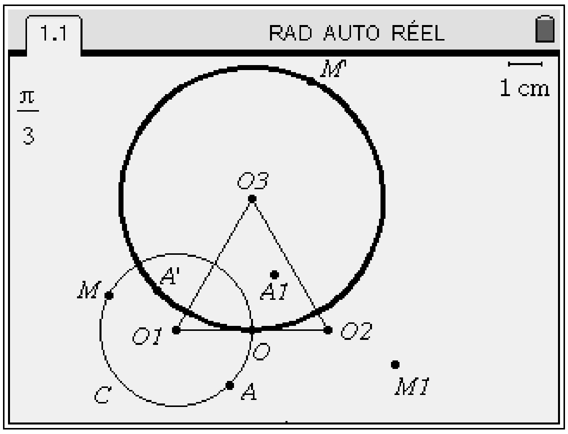
Tracer le **Cercle** $\mathcal{C}$ de centre O_1 passant par O puis le nommer.

2) Placer A distinct de O **Point sur** le cercle $\mathcal{C}$.

Construire A_1 image de A par la **Symétrie** de centre O, puis construire le point A', image de A_1 par la **Rotation** de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.



3) Placer M **Point sur** le cercle $\mathcal{C}$, M_1 image de M par la **Symétrie** de centre O, et l'image M' de M_1 par la **Rotation** de centre M et d'angle $\frac{\pi}{3}$.



Enfin demander le **Lieu** de M' quand M décrit le cercle $\mathcal{C}$ et mettre ce lieu en trait plus épais .

Conjecture

Il semble que le point M' décrive un cercle de centre O_3 passant par O.

Remarques :

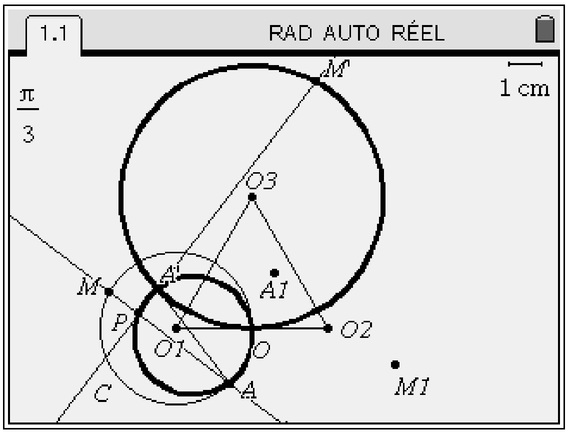
- si M est en O, M_1 et M' sont aussi confondus avec O, donc M' est encore sur le lieu précédent.
- Si on trace l'image de $\mathcal{C}$ par la similitude de centre O, de rapport $\sqrt{3}$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$, on constate cette image est le lieu tracé.

4) Tracer les **Droites** (AM) et ($A'M'$), leur **Point d'intersection** P.

Demander alors le **Lieu** du point P quand M décrit le cercle $\mathcal{C}$.

Conjecture :

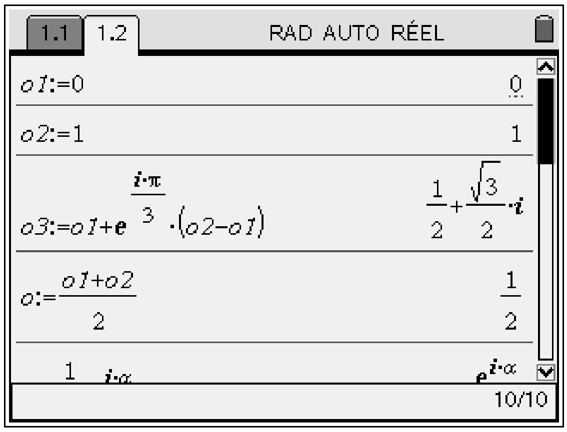
Il semble que ce lieu soit le cercle de diamètre [AA'].



Démonstrations

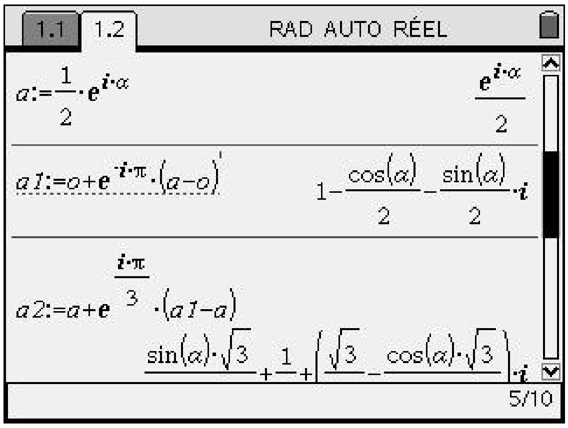
5) Ouvrir une page **Calculs**.

Prenons comme repère du plan le repère $(O_1, \overrightarrow{O_1O_2}, \vec{v})$ où $\vec{v}$ est un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{O_1O_2}$ et de même norme. Dans ce repère, les points O_1, O_2, O et O_3 ont pour affixes respectives $o_1 = 0$, $o_2 = 1$, $o = \frac{o_1 + o_2}{2}$, $o_3 = o_1 + e^{i\frac{\pi}{3}}(o_2 - o_1)$.



Le point A appartenant à $\mathcal{C}$ a pour affixe $a = \frac{1}{2} e^{i\alpha}$, α réel de [0 ; 2π[.

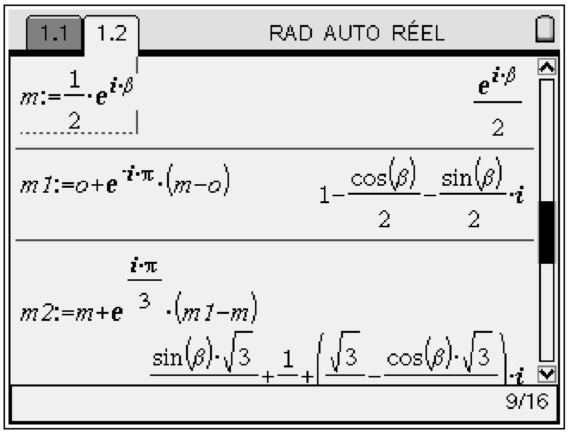
Alors l'affixe de A_1 est $a_1 = o + e^{-i\pi}(a - o)$, l'affixe de A' est $a_2 = a + e^{i\frac{\pi}{3}}(a_1 - a)$.



Le point M appartenant à $\mathcal{C}$ a pour affixe $m = \frac{1}{2} e^{i\beta}$,

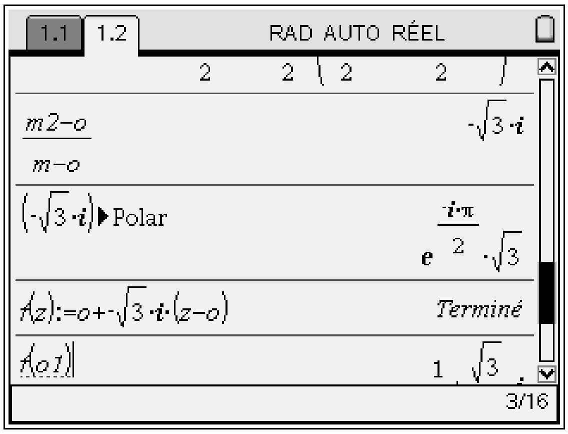
β réel de [0 ; 2π[.

Alors l'affixe de M_1 est $m_1 = o + e^{-i\pi}(m - o)$, l'affixe de M' est $m_2 = m + e^{i\frac{\pi}{3}}(m_1 - m)$.



6) Le rapport $\dfrac{m_2 - o}{m - o}$ vaut $-i\sqrt{3}$ soit $\sqrt{3}\,e^{-i\frac{\pi}{2}}$,

donc $m_2 = o + \sqrt{3}\,e^{-i\frac{\pi}{2}}(m - o)$, donc M' est l'image de M par la similitude s de centre O, de rapport $\sqrt{3}$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.



7) Soit f la fonction associée à l'écriture complexe de cette similitude.

$f(o_1) = \dfrac{1}{2} + i\,\dfrac{\sqrt{3}}{2} = o_3$, donc l'image du cercle $\mathcal{C}$ par s est le cercle $\mathcal{C}'$ de centre O_3 et de rayon $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; donc le lieu de M' est le cercle $\mathcal{C}'$.

On a $f(a) = a_2$ et $f(m) = m_2$ donc A'et M' sont les images de A et M par s. La droite $(A'M')$ est l'image de la droite (AM) par s.

Les droites $(A'M')$ et (AM) sont orthogonales pour tout M.

Le triangle APA' est rectangle en P, donc P décrit le cercle de diamètre $[AA']$ lorsque M décrit le cercle $\mathcal{C}$.