INSTITUTO TECNOLÓGICO DE LOS MOCHIS

MATERIA: ÁLGEBRA LINEAL

UNIDAD 1: NÚMEROS COMPLEJOS

PROFESOR: M. C. LUIS FELIPE FLORES LÓPEZ

El álgebra lineal aporta, al perfil de ingeniero, la capacidad para desarrollar un pensamiento lógico, heurístico y algorítmico al modelar fenómenos de naturaleza lineal y resolver problemas.

Dedicatoria

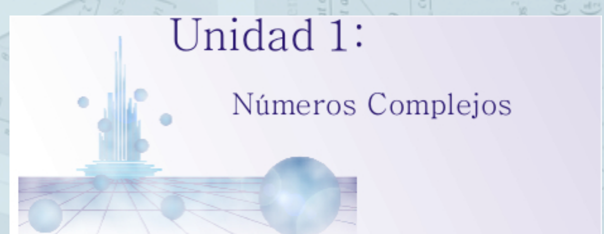
Para quien lo perfecto, no es un imposible,

Para quienes dieron lo mejor de sí, para hacernos hombres de bien,

Para quienes son partícipes de fortalecer el núcleo familiar,

Para quienes se comprometen con la Educación.

Agradezco su interés por las notas; sus comentarios y aportaciones serán de gran utilidad para transformarlas en un material didáctico.



1.1 DEFINICIÓN Y ORIGEN DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS.

Origen de los Números Complejos: La primera referencia conocida a raíces cuadradas de números negativos proviene del trabajo de los matemáticos griegos, como *Herón de Alejandría* en el siglo I antes de Cristo como resultado de una imposible sección de una pirámide.

El gran matemático *Diofanto* (275 d.C.) construyó un triángulo con una cuerda en la que había realizado 12 nudos (equidistantes). Los lados medían 3, 4 y 5.

Evidentemente el triángulo es rectángulo, cumple el teorema de Pitágoras:

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

Al ser un triángulo rectángulo es fácil comprobar que el área es 6 unidades.

Con la misma cuerda trató de construir otro triángulo rectángulo de forma que su área fuese 7 unidades. Su planteamiento fue el siguiente:

- un cateto mediría x
- como el área debía ser 7, el otro cateto será $14/x$.
- la hipotenusa debe cumplir el teorema de Pitágoras $x^2 + \left(\frac{14}{x}\right)^2 = h^2$

pero por otra parte la suma de sus lados debe ser 12 : $x + \frac{14}{x} + h = 12$

Por tanto se debe cumplir la ecuación: $x^2 + \frac{196}{x^2} = \left(12 - x - \frac{14}{x}\right)^2$

De donde se obtiene: $6x^2 - 43x + 84 = 0$

Cuya solución *Diofanto* expresó como: $\frac{43 \pm \sqrt{167}\sqrt{-1}}{12}$

Separando la fracción obtenemos: $\frac{43}{12} \pm \frac{\sqrt{167}}{12}\sqrt{-1}$

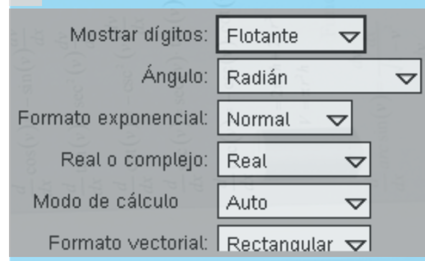
Pero no conocía ningún número que elevado al cuadrado fuese igual a -1, por tanto, el problema no tenía solución. Este problema planteado por *Diofanto* tardaría siglos en resolverse.

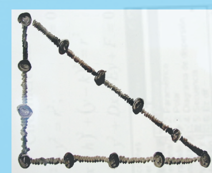
Los complejos se hicieron más patentes en el Siglo XVI, cuando la búsqueda de fórmulas que dieran las raíces exactas de los polinomios de grados 2 y 3 fueron encontradas por matemáticos italianos como *Tartaglia*, *Cardano*. Aunque sólo estaban interesados en las raíces reales de este tipo de ecuaciones, se encontraban con la necesidad de lidiar con raíces de números negativos. *Cardano* sugirió que el número real 40 se puede expresar como:

Para generar Nuevo Archivo: [on] [1]

Si aparece el mensaje ¿Desea guardar “Documento no guardado”? Seleccionar No [enter] [1] la página 1.1 se configuro en Modo Calculadora.

Configuraciones del documento: [doc▾] [7] [2] configurar como en la imagen de abajo, Ok [enter] para almacenar.





De los cálculos inferiores capturar la columna izquierda, al presionar [enter] aparecerá la columna derecha.

Nota: *Verifica que la captura la hayas realizado de manera correcta.*

$x^2+\left(\frac{14}{x}\right)^2=h^2$	$x^2+\frac{196}{x^2}=h^2$
$x+\frac{14}{x}+h=12$	$x+\frac{14}{x}+h=12$
$\left(x+\frac{14}{x}+h=12\right)+-x-\frac{14}{x}$	$h=-x-\frac{14}{x}+12$
$x^2+\left(\frac{14}{x}\right)^2=\text{expand}\left(\left(12-x-\frac{14}{x}\right)^2\right)$	$x^2+\frac{196}{x^2}=x^2-24\cdot x-\frac{336}{x}+\frac{196}{x^2}+172$
$\left(\frac{196}{x^2}=x^2-24\cdot x-\frac{336}{x}+\frac{196}{x^2}+172\right)+\frac{-196}{x^2}-x^2$	$0=-24\cdot x-\frac{336}{x}+172$
$\left(0=-24\cdot x-\frac{336}{x}+172\right)\cdot\frac{-x}{4}$	$0=6\cdot x^2-43\cdot x+84$

© Aplicamos la Formula General

$$\frac{-\left(-43+\sqrt{(-43)^2-4\cdot 6\cdot 84}\right)}{2\cdot 6}$$

"Error: Resultado no real"

$\left(5+\sqrt{-15}\right)\cdot\left(5-\sqrt{-15}\right)$

ya que $40 = 25-(-15) = 5^2-(\sqrt{-15})^2 = (5^2+\sqrt{-15})(5^2-\sqrt{-15})$

por lo tanto $40 = \left(5+\sqrt{-15}\right)\cdot\left(5-\sqrt{-15}\right)$

En 1777 el matemático suizo Leonhard Euler (1707 - 1783) simbolizó la raíz cuadrada de – 1 con la letra i *por imaginario.* $\therefore\ i^2=-1$

Esta idea también sugerida por Jean-Robert Argand que describió en 1806, mientras atendía una tienda de libros en París, la representación geométrica de los números complejos, publicando la idea de lo que se conoce como plano de Argand, que más tarde fue utilizada por Carl Friedrich Gauss para dar la interpretación geométrica de los números complejos.

Gauss, en su tesis doctoral de 1799, demostró su famoso teorema fundamental del álgebra, que dice que todo polinomio con coeficientes complejos tiene al menos una raíz compleja.

En 1825, continuando con el estudio de las funciones complejas, el matemático francés Augustin L. Cauchy generalizó el concepto de integrales definidas de funciones reales para funciones de variable compleja.

DEFINICIÓN 1.1: Un *número complejo* es un número de la clase $a+bi$ en donde a y b son reales. si a es cero el número complejo se reduce a un *número imaginario puro*. Si b es cero se reduce a un *número real*.

Los *números reales* $\mathbb{R}$ y los *números imaginarios puros* $\mathbb{I}$ son casos especiales de los números complejos $\mathbb{C}$.

DEFINICIÓN 1.2: *Igualdad de Números Complejos:* Dos números complejos $a+bi$ y $c+di$ son iguales $\Leftrightarrow$ $a=c$ y $b=d$

Ejemplo 1.1

Utilizamos la DEFINICIÓN 1.2 para determinar si existen valores para las incógnitas $x \wedge y$ que satisfagan la igualdad: $x-2+4yi=3+12i$

$x-2=3 \wedge 4y=12 \quad \therefore \quad x=5 \wedge y=3$

Ejercicios 1.1

Utiliza la DEFINICIÓN 1.2 para determinar si existen valores para las incógnitas a y b que satisfagan la igualdad:

1. $x-2i=3+3i-yi$
2. $3xi+2x=2yi+y+1$
3. $(x+yi)(1+2i)=-1+8i$
4. $(x+yi)(2-i)=5$
5. $(x-yi)(3+2i)=12-5i$

Para cambiar la configuración de Real a Rectangular, presiona las teclas:

doc▾ 7 2 luego selecciona Real o Complejo cambia a Rectangular enter enter para almacenar.

Acabas de configurara tu calculadora para Números Complejos en forma rectangular "a + b i".

Insertar página de Notas: doc▾ 4 8

Lo de Color Azul, se inserta en un cuadro matemático: ctrl menu 6

Una vez capturado enter, aparecerá la respuesta de Color Verde

$(5+\sqrt{-15})\cdot(5-\sqrt{-15})$ ▸ 40

Nota: La letra i de *imaginario* se obtiene con la tableta contenida en π▸

π	i	∞	e	θ
°	r	g	'	

se selecciona y enter

$\sqrt{-1}$ ▸ i

i^2 ▸ -1

Nota: La calculadora tiene la capacidad de almacenar variables de más de un carácter, por lo tanto, si tienes dos variables en producto coloca entre ellas el operador de multiplicación y así evitaras que las considere como una sola variable.

Para regresar a la página 1.1 ctrl ◂

Ejemplo 1.1

$(x-2=3)+2$	$x=5$
$(4\cdot y=12)\cdot\frac{1}{4}$	$y=3$
$5\to x$	5
$3\to y$	3
$x-2+4\cdot y\cdot i=3+12\cdot i$	true
DelVar x	*Hecho*
DelVar y	*Hecho*

Para grabar el Archivo doc▾ 1 5 Teclea en Nombre de archivo Notas U1

Generamos un Archivo Nuevo con una página de Notas para resolver los ejercicios de la sección 1.1

Lo gravamos con el Nombre de archivo Algebra Lineal U1 S1.1

1.2 OPERACIONES FUNDAMENTALES CON NÚMEROS COMPLEJOS.

Ejercicios 1.2

Resuelve los ejercicios de suma de binomios.

1. $(3+4x)+(5+2x)=$
2. $(7-3x)+(-4+3x)=$
3. $\left(\frac{1}{3}+2x\right)+\left(3-\frac{1}{4}x\right)=$
4. $(7-4x)+(-7+6x)=$
5. $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3x}\right)+\left(-\sqrt{2}-\sqrt{3x}\right)=$
6. $(0.213+0.543x)+(3.3-1.2x)=$
7. $(a+b\cdot x)+(c+d\cdot x)=$

En álgebra ¿Qué representan las primeras letras del alfabeto? ________

Si en el ejercicio 7 de *suma de expresiones algebraicas*, sustituimos las x por i ¿qué obtenemos? ______________________________

de manera similar se define la resta de números complejos.

DEFINICIÓN 1.3: *suma de números complejos*

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i \quad \therefore \quad a,b,c,d \in \Re$$

DEFINICIÓN 1.4: *resta de números complejos*

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i \quad \therefore \quad a,b,c,d \in \Re$$

Ejemplo 1.2

Utilizamos la DEFINICIÓN 1.3 para obtener la *suma de números complejos*

$$(2+3i)+(-5+7i)=(2-5)+(3+7)i=-3+10i$$

Ejemplo 1.3

Utilizamos la DEFINICIÓN 1.4 para obtener la *resta de números complejos*

$$(2+3i)-(-5+7i)=(2+5)+(3-7)i=7-4i$$

Ejercicios 1.3

Utiliza las Definiciones 1.3 y 1.4 para resolver los ejercicios de suma y resta de números complejos.

1. $(7+4i)+(5+8i)=$
2. $(-1-3i)-(-4-5i)=$
3. $\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{2}i\right)+\left(\frac{5}{3}+\frac{1}{4}i\right)=$
4. $(3-4i)-(-3-4i)=$

Generamos un Archivo Nuevo, incluimos siete páginas de Notas para contestar las listas de ejercicios del 1.3 al 1.8

Lo gravamos con el Nombre de archivo Algebra Lineal U1 S1.2

Para avanzar a la página 1.2 ctrl ▸

Definición se Suma y Resta de números complejos

Suma de Números Complejos

$a+b\cdot i+c+d\cdot i=a+c+(b+d)\cdot i$ ▸ true

Resta de Números Complejos

$a+b\cdot i-(c+d\cdot i)=a-c+(b-d)\cdot i$ ▸ true

Ejemplo 1.2

$2+3\cdot i+-5+7\cdot i=2-5+(3+7)\cdot i$ ▸ true

$2-5+(3+7)\cdot i=-3+10\cdot i$ ▸ true

Ejemplo 1.3

$2+3\cdot i-(-5+7\cdot i)=2+5+(3-7)\cdot i$ ▸ true

$2+5+(3-7)\cdot i=7-4\cdot i$ ▸ true

5. $\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}i\right)+\left(-\sqrt{3}-\sqrt{3}i\right)=$

6. $(1.243+0.54i)-(-1.757-1.46i)=$

Nota: Utiliza jerarquía de operaciones para el ejercicio.

7. $\left(2+\sqrt{2}i\right)-\left(6-2\sqrt{2}i\right)+\left(0+\sqrt{2}i\right)=$

Ejercicios 1.4

Efectúa la operación indicada en los productos de binomios.

1. $(3+2x)(5-3x)=$
2. $(2+3x)(2+3x)=$
3. $\left(5-\sqrt{5}x\right)\left(\sqrt{5}-x\right)=$
4. $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}x\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}x\right)=$
5. $(a+b\cdot x)(c+d\cdot x)=$

Ahora bien, se adecua el producto de dos binomios (caso general) al producto de números complejos:

$$\begin{aligned}(a+bi)\cdot(c+di) &= a\cdot(c+di)+bi\cdot(c+di)\\ &= a\cdot c+a\cdot di+b\cdot ci+b\cdot di^2\\ &= a\cdot c+(a\cdot d+b\cdot c)i+b\cdot di^2\end{aligned}$$

como se observa no tiene la forma de número complejo, ya que el término $b\cdot di^2$ debemos ubicarlo en la parte real o en la parte imaginaria, en otras palabras sustituir i^2 por otra expresión o número y simplificarla. La respuesta es $i^2=$____, quedando la expresión

$$\begin{aligned} &= a\cdot c+b\cdot d\cdot(\quad)+(a\cdot d+b\cdot c)\cdot i\\ &= a\cdot c\quad b\cdot d+(a\cdot d+b\cdot c)i\end{aligned}$$

DEFINICIÓN 1.5: *Producto de dos números complejos*

$$(a+bi)(c+di)=a\cdot c-b\cdot d+(a\cdot d+b\cdot c)i \quad \therefore \quad \mathrm{a,b,c,d}\in\Re$$

Ejemplo 1.4

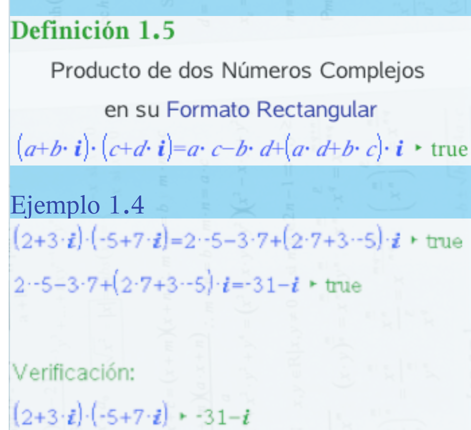
Utilizamos la DEFINICIÓN 1.5 para obtener el *producto de números complejos*

$$(2+3i)(-5+7i)=2(-5)-3\cdot 7+(2\cdot 7+3\cdot(-)5)i=-31-i$$

Ejercicios 1.5

Utiliza la DEFINICIÓN 1.5 para resolver los ejercicios de *producto de números complejos*.

1. $(4+2i)(5-6i)=$
2. $3\cdot -5i=$



3. $\left(3-\sqrt{2}i\right)\left(\sqrt{2}-i\right)=$

4. $\left(\frac{1}{3}-4i\right)\left(3+\frac{2}{3}i\right)=$

5. $(3+5i)(3-5i)=$

NOTA: Existen casos especiales de producto de dos binomios, resuelve los siguientes productos notables.

5. $(8+i)^2=$

6. $(3-5i)^2=$

7. $(5-4i)(5+4i)=$

8. $(9-2i)(9+3i)=$

9. $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}i\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}i\right)=$

10. $(2+3i)^3=$

En los ejercicios del 5-10 existen ejercicios que se diferencia de los demás, su resultado es un número ________ ¿Cuáles? ______ y ______

DEFINICIÓN 1.6: ***Números Complejos Conjugados.*** Se dice que dos números complejos son conjugados uno de otro si sus partes reales son iguales y, sus partes imaginarias difieren sólo en signo.

Su estudio se debe a que el producto de conjugados da como resultado un número real.

Ejemplo 1.5

Utilizamos la DEFINICIÓN 1.6 para obtener el conjugado de $-5+7i$ multiplicarlos y simplificar

$$\begin{aligned}(-5+7i)(-5-7i) &= -5\cdot-5+(-5\cdot-7i)+(7i\cdot-5)+7i\cdot-7i\\ &= 25-49i^2=25-49(-1)=74\end{aligned}$$

El *Producto de Conjugados* se define $(a+bi)(a-bi)=$

Ejercicios 1.6

Resuelve los ejercicios utilizando producto de conjugados:

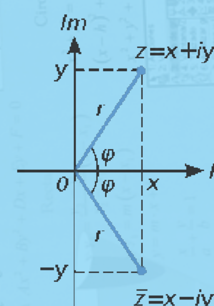
1. $(1-5i)(1+5i)=$

2. $(1.3-1.21i)(1.3+1.21i)=$

3. $\left(1-\sqrt{3}i\right)\left(1+\sqrt{3}i\right)=$

4. $3\sqrt{3}i\cdot-3\sqrt{3}i=$

5. $(3-5i)(3+5i)=$



Ejemplo 1.5

$(-5+7\cdot i)\cdot(-5-7\cdot i)=-5\cdot-5+-5\cdot-7\cdot i+7\cdot i\cdot-5+7\cdot i\cdot-7\cdot i$ ▸ true

$-5\cdot-5+-5\cdot-7\cdot i+7\cdot i\cdot-5+7\cdot i\cdot-7\cdot i=25-49\cdot i^2$ ▸ true

$25-49\cdot i^2=25-49\cdot-1$ ▸ true

$25-49\cdot-1=74$ ▸ true

Verificación:

$(-5+7\cdot i)\cdot(-5-7\cdot i)$ ▸ 74

Ejemplo 1.6

Para simplificar $\frac{10i-6}{2}$, separamos la parte real y la parte imaginaria.

$$\frac{10i-6}{2}=\frac{10i}{2}-\frac{6}{2}=5i-3=-3+5i$$

Para verificar la operación, multiplicamos el resultado por el denominador para obtener el numerador

Verifiquemos el resultado: $2\cdot(5i-3)=2\cdot 5i+2\cdot -3=10i-6$

Generalicemos el procedimiento anterior a un cociente de complejos que no sea divisible. Multiplicamos el cociente de números complejos por el conjugado del denominador, el proceso permitirá obtener un denominador real, separamos la *parte real* de la *parte imaginaria* y mostrar el resultado en su formato más simple.

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)}{(c+di)}\cdot\frac{(c-di)}{(c-di)}=\frac{(a\cdot c+b\cdot d)+(b\cdot c-a\cdot d)i}{c^2-d^2i^2}$$

$$=\frac{(a\cdot c+b\cdot d)}{c^2+d^2}+\frac{(b\cdot c-a\cdot d)}{c^2+d^2}\cdot i$$

Verifiquemos si es una forma alterna de dividir

$$\left(\frac{(a\cdot c+b\cdot d)}{c^2+d^2}+\frac{(b\cdot c-a\cdot d)}{c^2+d^2}i\right)(c+di)=a+bi$$

Como la verificación es demasiada elaborada, mejor le preguntamos a la calculadora si la igualdad es Cierta o Verdadera

$$\left(\frac{a\cdot c+b\cdot d}{c^2+d^2}+\frac{b\cdot c-a\cdot d}{c^2+d^2}\cdot i\right)\cdot(c+d\cdot i)=a+b\cdot i \;\blacktriangleright\; \text{true}$$

El resultado valida la igualdad, por lo tanto, el procedimiento es una forma alterna de dividir.

DEFINICIÓN 1.7: *Cociente de números complejos:*

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a\cdot c+b\cdot d)}{c^2+d^2}+\frac{(b\cdot c-a\cdot d)}{c^2+d^2}i \quad \therefore \quad a, b, c, d \in \Re$$

Ejemplo 1.7

$$\frac{2+3i}{-5+7i}=\frac{2(-5)+3(7)}{(-5)^2+7^2}+\frac{3(-5)-2(7)}{(-5)^2+7^2}i=\frac{11}{74}-\frac{29}{74}i$$

Verifiquemos el resultado: $\left(\frac{11}{74}-\frac{29}{74}i\right)\cdot(-5+7i)=2+3i$

Ejemplo 1.6

$$\frac{10\cdot i-6}{2}=\frac{10}{2}\cdot i-\frac{6}{2} \;\blacktriangleright\; \text{true}$$

$$\frac{10}{2}\cdot i-\frac{6}{2}=-3+5\cdot i \;\blacktriangleright\; \text{true}$$

Ejemplo 1.7

$$\frac{2+3\cdot i}{-5+7\cdot i}=\frac{2\cdot -5+3\cdot 7}{(-5)^2+7^2}+\frac{3\cdot -5-2\cdot 7}{(-5)^2+7^2}\cdot i \;\blacktriangleright\; \text{true}$$

$$\frac{2\cdot -5+3\cdot 7}{(-5)^2+7^2}+\frac{3\cdot -5-2\cdot 7}{(-5)^2+7^2}\cdot i=\frac{11}{74}-\frac{29}{74}\cdot i \;\blacktriangleright\; \text{true}$$

Verificación:

$$\frac{2+3\cdot i}{-5+7\cdot i} \;\blacktriangleright\; \frac{11}{74}-\frac{29}{74}\cdot i$$

$$\left(\frac{11}{74}-\frac{29}{74}i\right)\cdot(-5+7i)=\left(\frac{11}{74}-\frac{29}{74}i\right)\cdot -5+\left(\frac{11}{74}-\frac{29}{74}i\right)\cdot 7i=$$

$$\left(\frac{-55}{74}+\frac{145}{74}i\right)+\left(\frac{77}{74}i-\frac{203}{74}i^2\right)=-\frac{55}{74}+\frac{203}{74}+\left(\frac{145}{74}+\frac{77}{74}\right)i=$$

$$\frac{148}{74}+\frac{222}{74}i=2+3i$$

Démosle un voto de confianza a la tecnología y procedamos de aquí en adelante verificar el resultado con la calculadora

$$\left(\frac{11}{74}-\frac{29}{74}\cdot i\right)\cdot(-5+7\cdot i)=2+3\cdot i \ \blacktriangleright \ \text{true}$$

Ejercicios 1.7

Utiliza la DEFINICIÓN 1.7, para obtener el resultado del *cociente de números complejos*.

1. $\dfrac{17-7i}{1-5i}=$
2. $\dfrac{-1-3i}{3-i}=$
3. $\dfrac{4-5i}{6}=$
4. $\dfrac{3+2i}{6i}=$
5. $\dfrac{4-2i}{2+2i}=$
6. $\dfrac{6\sqrt{2}-5i}{3-\sqrt{2}i}$
7. $\dfrac{\frac{2}{3}+\frac{5}{6}i}{2-3i}=$

Ejemplo 1.8

Utilizamos $i^2=-1 \wedge x^{m+n}=x^m x^n$ para calcular i^3

$$i^3=i\cdot i^2=i\cdot(-1)=-i$$

Ejemplo 1.8

$i^3=i\cdot i^2 \ \blacktriangleright$ true

$i\cdot i^2=i\cdot -1 \ \blacktriangleright$ true

$i\cdot -1=-i \ \blacktriangleright$ true

$\therefore i^3=-i \ \blacktriangleright$ true

Ejercicios 1.8

1. Calcular $i^4=$
2. Calcular $i^5=$
3. Calcular $i^{10}=$
4. Calcular $i^{14}=$
5. ¿Puedes construir una fórmula que te permita calcular cualquier potencia de i?, justifica tu respuesta.

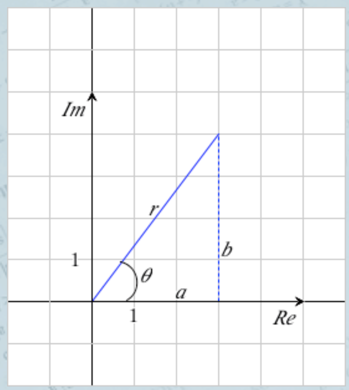
Resuelve el ejercicio usando $(a+b)^3$ y las DEFINICIONES 1.5 Y 1.7

$$\left(\frac{\left(-\sqrt{3}+3i\right)^3}{\left(\sqrt{15}/2-\sqrt{5}/2i\right)^2}\right)^3=$$

Nota: En la próxima sección veremos que los cálculos se puede simplificar, cambiando el ejercicio, al formato polar simplificado.

1.3 MÓDULO Y ARGUMENTO DE UN NÚMERO COMPLEJO.

La representación geométrica nos permite representar los Números Complejos en forma de par ordenado así z = (3, 4) donde la primera componente pertenece a la parte Real (*Re*) y la Segunda componente a la parte Imaginaria (*Im*).



DEFINICIÓN 1.8: *Valor Absoluto o Módulo.* Es segmento de recta que une el origen con el punto $z = a + bi = (a,b)$ se etiqueta con la letra r.

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Ejemplo 1.9

Sea $z = 3 + 7i$ calcula el valor absoluto o módulo

$$r = \sqrt{3^2 + 7^2} = \sqrt{58}$$

DEFINICIÓN 1.9: *Amplitud o Argumento.* Es el ángulo formado por el segmento r y el eje positivo

$$\theta = \tan^{-1}\left(b/a\right)$$

Ejemplo 1.10

Sea $z = 3 + 7i$ calcula amplitud o argumento

$$\theta = \arctan\left(\frac{7}{3}\right) \approx 66.8014094864$$

Ejercicios 1.9

Calcula el valor absoluto o módulo de los siguientes ejercicios:

1. Sea $z = 3 - 7i$ obtener $r =$
2. Sea $z = 0 - 0.2i$ obtener $r =$
3. Sea $z = \sqrt{3} - 7i$ obtener $r =$

Calcula la amplitud o argumento de los siguientes ejercicios:

4. Sea $z = 3 - 7i$ obtener $\theta =$
5. Sea $z = 0 - 0.2i$ obtener $\theta =$
6. Sea $z = \sqrt{3} - 7i$ obtener $\theta =$

Jean Robert Argand (1768-1822) fue un contable y un talentoso matemático autodidacta francés, nacido en Suiza, en 1806 mientras atendía una tienda de libros en París, construyó la representación geométrica de los números complejos, hoy conocido como plano de Argand.

Presiona las teclas [doc▾][7][2], verifica que el *ángulo* este configurado en ***grados***, y el formato real o complejo en ***polar***, en caso que no lo estén, configurarlos.

¿En que página 1.1 o 1.2 se encuentran los ejemplos 1.9 y 1.10?, Colócate en la página y capturarlos.

Presiona [trig] para acceder a la paleta de las identidades trigonométricas:

sin	cos	tan	csc	sec	cot
sin⁻¹	cos⁻¹	tan⁻¹	csc⁻¹	sec⁻¹	cot⁻¹

Ejemplo 1.9

$\sqrt{3^2+7^2}$	$\sqrt{58}$

Ejemplo 1.10

Modo aproximado: [ctrl] [enter]

$\tan^{-1}\left(\frac{7}{3}\right)$	66.8014094864

Generamos un Archivo Nuevo con una página de Notas para resolver los ejercicios de la sección 1.3

Lo gravamos con el Nombre de archivo Algebra Lineal U1 S1.3

1.4 Forma Polar de un Número Complejo.

Definición 1.10: Sea $z = r\cdot\cos(\theta) + r\cdot\sin(\theta)i$ al factorizar r se obtiene la *Forma Polar* de los Números Complejos:

$$z = r(\cos(\theta) + \sin(\theta)i) = (r\angle\theta)$$

Ejemplo 1.11

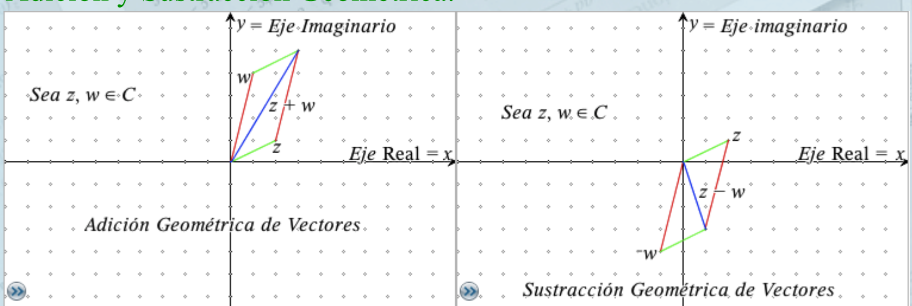
Utiliza las Definiciones 1.8, 1.9, 1.10 para convertir a forma polar el número complejo $2+i$

$$r = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \approx 26.5650511771$$

$$z = \left(\sqrt{5}\angle\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right) \approx (2.2360679775\angle 26.5650511771)$$

Adición y Sustracción Geométrica.



Ejercicios 1.10

En los ejercicios del 1-4 construye la gráfica de las operaciones indicadas.

1. $p_1 = (-1,2),\quad p_2 = (-5,0),\quad p_1 + p_2,\quad p_1 - p_2$
2. $p_3 = (-5,-1),\quad p_4 = (-2,-3),\quad p_3 + p_4,\quad p_4 - p_3$
3. $p_5 = (6,-2),\quad p_6 = (1,-2),\quad p_5 + p_6,\quad p_5 - p_6$
4. $p_7 = (2,1),\quad p_8 = (3,1),\quad p_7 + p_8,\quad p_8 - p_7$
5. Convierte los ocho puntos a su forma rectangular.
6. Realiza las operaciones indicadas en los ejercicios del 1-4 pero en forma rectangular.
7. Transforma los ocho resultados de los ejercicios 1-4 a su forma rectangular.
8. Compara los resultados de los ejercicios 6 y 7 ¿Cómo son?, ______ ¿Por qué?____

Producto de dos Números Complejos:

$$(r_1\cdot\cos(\theta) + r_1\cdot\sin(\theta)i)(r_2\cdot\cos(\phi) + r_2\cdot\sin(\phi)i)$$

Formato simplificado de la Forma Polar

$r\cdot(\cos(\theta)+i\cdot\sin(\theta))=(r\angle\theta)$ true

Nota: Cuando la calculadora esta configurada en modo *Automático*, se tiene la posibilidad de obtener el *Modo Exacto* o el *Modo Aproximado*.

Ejemplo 1.11

Modo exacto: enter

$2+i$ $\left(\sqrt{5}\angle\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)$

Modo aproximado: ctrl enter

$2+i$ $(2.2360679775\angle 26.5650511771)$

Generamos un Archivo Nuevo para la Sección 1.4, con seis Problemas los primeros tres con una página de Gráficos para graficar los primeros tres ejercicios; el problema cuatro con una pagina de Gráficos para el cuarto ejercicio y una página de Notas para los ejercicios del 5 al 8.

La quinta página para los Ejercicios 1.11 y la sexta para los Ejercicios 1.1260

Lo gravamos con el Nombre de archivo Algebra Lineal U1 S1.4

1. Multiplica los términos de los dos binomios.
2. Factorizar $r_1 r_2$ de los cuatro términos.
3. Use las identidades trigonométricas del *Producto de Funciones*
4. Aplique inversos aditivos y simplifique.

DEFINICIÓN 1.11:

Sean $z=(r_1\angle\theta)$ y $w=(r_2\angle\phi)$ números Complejos, el *producto de dos números complejos* se define como:

$$z\cdot w=(r_1\cdot r_2\angle\theta+\phi)$$

Ejemplo 1.12

Sean $z=(2\angle 30)$ y $w=(3\angle 45)$, usa la DEFINICIÓN 1.11 para obtener el *producto de dos números complejos*.

$z\cdot w=(2\cdot 3\angle 30+45)=(6\angle 75)$

Ejercicios 1.11

Sean $u=(2\angle 15)$, $v=(\sqrt{6}\angle 135)$, $w=(3\angle 180)$, $z=(\sqrt{2}\angle 300)$

Usa la DEFINICIÓN 1.11 para obtener los productos en su forma polar

1. $u\cdot v=$
2. $v\cdot w=$
3. $w\cdot z=$
4. $z\cdot w=$
5. $u\cdot u=$
6. $v\cdot v=$
7. $z\cdot z=$

Cociente de dos Números Complejos:

$$\frac{r_1\cdot\cos(\theta)+r_1\cdot\sin(\theta)i}{r_2\cdot\cos(\phi)+r_2\cdot\sin(\phi)i}$$

1. Multiplica numerador y denominador por el conjugado del denominador.
2. Sustituir el numerador por la definición de producto y en el denominador aplica binomios conjugados.
3. Factorizar $r_2^{\,2}$ de los dos términos del denominador.
4. Sustituya i^2 por -1 en el denominador.

Ejemplo 1.12

Modo Exacto enter

$(2\angle 30)\cdot(3\angle 45)$ $\quad\left(6\angle \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{12}+4}{2}\right)\right)$

Modo Aproximado ctrl enter

$(2\angle 30)\cdot(3\angle 45)$ $\quad(6.\angle 75.)$

5. Sustituya $\sin^2(\theta)+\cos^2(\theta)$ por 1.
6. Simplifique el denominador.
7. Simplifique el Cociente.

DEFINICIÓN 1.12:

Sean $z=(r_1\angle\theta)$ y $w=(r_2\angle\phi)$ números complejos, el *cociente de dos números complejos* se define de la siguiente manera:

$$\frac{z}{w}=\left(\frac{r_1}{r_2}\angle\theta-\phi\right)$$

Ejemplo 1.13

Sean $z=(3\angle 15)$ y $w=(7\angle 105)$, utiliza la DEFINICIÓN 1.12 para calcular: z/w

$$\frac{(3\angle 15)}{(7\angle 105)}=\left(\frac{3}{7}\angle 15-105\right)=\left(\frac{3}{7}\angle 15-105\right)=\left(\frac{3}{7}\angle -90\right)=\left(\frac{3}{7}\angle 270\right)$$

Ejercicios 1.11

Sean $u=(2\angle 15)$ $\quad$ $v=(\sqrt{6}\angle 135)$

$w=(3\angle 180)$ $\quad$ $z=(\sqrt{2}\angle 300)$

Utiliza la DEFINICIÓN 1.12 para resolver los cocientes en su forma polar

1. $\dfrac{u}{v}=$
2. $\dfrac{u}{w}=$
3. $\dfrac{w}{z}=$
4. $\dfrac{z}{u}=$
5. $\dfrac{w}{u}=$
6. $\dfrac{v}{u}=$
7. $\dfrac{w}{v}=$

Ejercicio 1.13

$\frac{3\angle 15}{(7\angle 105)}=\left(\frac{3}{7}\angle 15-105\right)$ ▸ true

$\left(\frac{3}{7}\angle 15-105\right)=\left(\frac{3}{7}\angle -90\right)$ ▸ true

$\therefore \frac{3\angle 15}{(7\angle 105)}=\left(\frac{3}{7}\angle -90\right)$ ▸ true

Conversión resultado a Formato Rectangular

$\left(\left(\frac{3}{7}\angle -90\right)\right)$▸Rect ▸ $\frac{-3}{7}\cdot i$

Equivalencia en Formato Polar

$\left(\frac{3}{7}\angle -90\right)=\left(\frac{3}{7}\angle 270\right)$ ▸ true

Conversión Equivalencia a Formato Rectangular

$\left(\left(\frac{3}{7}\angle 270\right)\right)$▸Rect

1.5 TEOREMA DE DE MOIVRE Y RAÍCES DE NÚMEROS COMPLEJOS.

Utiliza la definición de producto de números complejos en su forma polar. Sea $z=(r\angle\theta)$

1. Multiplica $z\cdot(z\cdot z)=$
2. Multiplica $z\cdot(z\cdot(z\cdot z))=$
3. Si $z\cdot z=z^2$, $z\cdot(z\cdot z)=z^3$ y $z\cdot(z\cdot(z\cdot z))=z^4$; ¿Puedes generalizar z^n? Si _____ No _____
4. Si la respuesta es Si, ¿Cuál es la formula? $z^n=$
5. Demuestra el teorema por el método de Inducción Matemática.

Sea $z=(r\angle\theta)$ un número complejo en su forma polar, tal que el producto sucesivo de z genera al TEOREMA DE MOIVRE:

TEOREMA 1.1: *Teorema de Moivre para Potencias* sea $z=(r\angle\theta)$ las potencias se expresa de la siguiente manera $z^n=\left(r^n\angle n\theta\right)$

Ejemplo 1.14
Se utiliza el TEOREMA 1.1 , para obtener z^5 de $z=(2\angle165)$

$$z^5=\left(2^5\angle5\cdot165\right)=(32\angle825)=(32\angle825-2\cdot360)=(32\angle105)$$

EJERCICIOS 1.12

1. Sea $z=(2\angle165)$ calcula $z^7=$
2. Sea $z=\left(\frac{2}{3}\angle330\right)$ calcula $z^4=$
3. Sea $z=\left(\sqrt{3}\angle15.5\right)$ calcula $z^5=$
4. Sea $z=\left(3\sqrt{2}\angle16°5'10''\right)$ calcula $z^3=$
5. Sea $z=(2\angle15)$ calcula $z^{25}=$

Raíces de Números Complejos. Utilicemos el Teorema de De Moivre para la deducción de raíces de números complejos.
Partimos de las igualdades $r^{p/q}=R$ y $p/q\,\theta=\phi$

$$\left(r^{p/q}\right)^q=R^q \text{ y } \left(p/q\,\theta\right)\cdot q=\phi\cdot q$$

$$r^p=R^q \text{ y } \theta\cdot p=\phi\cdot q$$

Apliquemos el teorema De Moivre a la potencia fraccionaria

$$(r\angle\theta)^{p/q}=\left((r\angle\theta)^p\right)^{1/q}=\left(r^p\angle p\theta\right)^{1/q}$$

$$=\left(R^q\angle q\phi\right)^{1/q}=\left((R\angle\phi)^q\right)^{1/q}$$

$$=(R\angle\phi)$$

Ejemplo 1.14

$((2\angle165))^5$	$(32\angle105)$

Generamos un Archivo Nuevo con dos páginas de Notas para resolver los ejercicios de la sección 1.5
Lo gravamos con el Nombre de archivo Algebra Lineal U1 S1.5

TEOREMA 1.2: *Teorema de Moivre para Potencias Fraccionarias* sea $z=(r\angle\theta)$ las potencias fraccionarias se expresan $z^{p/q}=\left(r^{p/q}\angle\frac{p}{q}\theta\right)$

Ejemplo 1.15

Calcula la siguiente potencia fraccionaria $(6\angle 30)^{\frac{2}{3}}$

$$(6\angle 30)^{\frac{2}{3}}=\left(6^{\frac{2}{3}}\angle\tfrac{2}{3}\cdot 30\right)=\left(6^{\frac{2}{3}}\angle 20\right)$$

Si $p=1$ entonces sólo tenemos raíces complejas $z^{1/q}=\left(r^{1/q}\angle\frac{1}{q}\theta\right)$

Ejemplo 1.16

Calcula la raíz cúbica de $(8\angle 120)$

$$(8\angle 120)^{\frac{1}{3}}=\left(8^{1/3}\angle\tfrac{1}{3}120\right)=(2\angle 40)$$

Ejemplo 1.17

localiza las raíces cúbicas de $1+i$

$r=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$; $\qquad\theta=\arctan\left(1/1\right)=45^0$

$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos(45)+\sin(45)i\right)=\left(2^{1/2}\angle 45\right)$$

$$\left(2^{1/2}\angle 45\right)^{1/3}=\left(\left(2^{1/2}\right)^{1/3}\angle\tfrac{1}{3}\cdot(45+k\cdot 360)\right)=\left(2^{1/6}\angle 15+k\cdot 120\right)$$

Para $k=0$ tenemos:

$$\left(2^{1/6}\angle 15+0\cdot 120\right)=\left(2^{1/6}\angle 15\right)$$

Para $k=1$ tenemos:

$$\left(2^{1/6}\angle 15+1\cdot 120\right)=\left(2^{1/6}\angle 135\right)$$

Para $k=2$ tenemos:

$$\left(2^{1/6}\angle 15+2\cdot 120\right)=\left(2^{1/6}\angle 255\right)$$

Ejercicios 1.13

Potencias fraccionarias

1. $\left(1+(2-\sqrt{3})i\right)^{3/2}=$
2. $-i^{3/5}=$
3. $\left(1+\sqrt{3}i\right)^{3/2}=$

Localice las raíces indicadas

4. Raíces cuartas de $2+\left(4+2\sqrt{3}\right)i=$
5. Raíces quintas de $243=$
6. Raíces cúbicas de $1-i=$

Ejemplo 1.15

$$((6\angle 30))^{\frac{2}{3}}=\left(6^{\frac{2}{3}}\angle\frac{2}{3}\cdot 30\right) \blacktriangleright \text{true}$$

$$\left(6^{\frac{2}{3}}\angle\frac{2}{3}\cdot 30\right)=\left(6^{\frac{2}{3}}\angle 20\right) \blacktriangleright \text{true}$$

Ejemplo 1.16

$$((8\angle 120))^{\frac{1}{3}}=\left(8^{\frac{1}{3}}\angle\frac{1}{3}\cdot 120\right) \blacktriangleright \text{true}$$

$$\left(8^{\frac{1}{3}}\angle\frac{1}{3}\cdot 120\right)=(2\angle 40) \blacktriangleright \text{true}$$

Ejemplo 1.17

$$(1+i)\blacktriangleright\text{Polar} \blacktriangleright \left(\sqrt{2}\angle 45\right)$$

Para k=0

$$\left(2^{\frac{1}{6}}\angle\frac{1}{3}\cdot(45+0\cdot 360)\right)=\left(2^{\frac{1}{6}}\angle 15\right) \blacktriangleright \text{true}$$

Para k=1

$$\left(2^{\frac{1}{6}}\angle\frac{1}{3}\cdot(45+1\cdot 360)\right)=\left(2^{\frac{1}{6}}\angle 135\right) \blacktriangleright \text{true}$$

Para k=2

$$\left(2^{\frac{1}{6}}\angle\frac{1}{3}\cdot(45+2\cdot 360)\right)=\left(2^{\frac{1}{6}}\angle 255\right) \blacktriangleright \text{true}$$

1.6 Ecuaciones Polinómicas.

En la práctica necesitamos resolver ecuaciones polinómicas de la forma: $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n+1}+a_{n-2}x^{n-2}+..a_2x^2+a_1x^1+a_0x^0$, con la ayuda de los números complejos podemos encontrar todas las raíces del polinomio.

Ejemplo 1.18

…se obtiene: $6x^2-43x+84=0$

Cuya solución Diofanto expresó como: $\dfrac{43\pm\sqrt{167}\sqrt{-1}}{12}$

solo falta sustituir para obtener $\dfrac{43}{12}\pm\dfrac{\sqrt{167}}{12}i$

Ejemplo 1.19

Obtener las raíces del siguiente polinomio

$x^5+4x^4+3x^3-x^2-4x-3$

Localizamos las raíces reales con el método de división sintética .

1	4	3	−1	−4	−3	1
	1	5	8	7	3	
1	5	8	7	3	0	

Primera raíz 1 y el polinomio se simplifica a: $x^4+5x^3+8x^2+7x+3$

1	5	8	7	3	−1
	−1	−4	−4	−3	
1	4	4	3	0	

Segunda raíz -1 y el polinomio se simplifica a: x^3+4x^2+4x+3

1	4	4	3	−3
	−3	−3	−3	
1	1	1	0	

la tercera raíz -1 y el polinomio se simplifica a: x^2+x+1

Aplicamos la formula general al polinomio resultante, ya que no es posible continuar con la división sintética, ¿Por qué? ______________

____

$$\frac{-1+\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}=\frac{-1+\sqrt{3\cdot-1}}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\frac{-1-\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}=\frac{-1-\sqrt{3\cdot-3}}{2}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Concluimos

las raíces del polinomio $x^5+4x^4+3x^3-x^2-4x-3$ son:

$$x_1=-1;\quad x_2=1;\quad x_3=-3;\quad x_4=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i;\quad x_5=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Regla de la división sintética.

Para dividir F(x) entre x-r por división sintética:

1. Se escriben los coeficientes de F(x) en el mismo orden que las potencias decrecientes de x. Si falta una de éstas se escribe cero en el lugar que le corresponde.
2. Se sustituye el divisor x-r por +r, iniciando con : $r=\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$ ó $\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{3},\pm\frac{2}{3},\ldots$
3. Se vuelve a escribir, debajo de él, el coeficiente de la mayor potencia de x y se multiplica por r. El producto obtenido se coloca inmediatamente debajo del coeficiente de x que sigue en orden, y se suma con éste. La suma obtenida se multiplica por r y el producto obtenido se coloca debajo del coeficiente que sigue y se suma con el mismo. Se continua así con el procedimiento hasta obtener un producto que se suma al término constante, si el resultado es cero r es una raíz, sin no probar con otro valor para r y se repite el paso 3.
4. Él último número de la tercera línea es el residuo, y los otros, leídos de izquierda a derecha, son los coeficientes del cociente, cuyo grado es siempre menor en uno que el grado de F(x).

Ejercicios 1.14

Obtener las raíces de los siguientes polinomios

1. $p(x)=3x^2-2x+1$
2. $p(x)=-x^3+x^2+10x-6$
3. $p(x)=x^3+x^2+4$
4. $p(x)=x^4-2x^3-3x^2+4x-12$
5. $p(x)=x^4-2x^2+1$
6. $p(x)=x^4+3x^3+4x^2+3x+1$
7. $p(x)=x^5+5x^4+10x^3+11x^2+7x+2$

Generamos un Archivo Nuevo con una página de Notas para resolver los ejercicios y una página de gráficos para Verificar los resultados en una ambiente gráfico.

Lo gravamos con el Nombre de archivo Algebra Lineal U1 S1.6

Bibliografía

Álgebra Lineal
Stanley L. Grossman
Ed Mc Graw Hill

Álgebra
Paul K. Rees, Fred W. Sparks
Ed Reverté

Álgebra Moderna
Eugene D. Nichols, Ralph T. Heimer, Henry Garland
Ed. CECSA

Wikipedia

Un agradecimiento personal por sus propuestas de mejora