FLUX DE POPULATIONS (2)

Auteur : Jean-Pierre Bouvier

TI-Nspire™ CAS

Mots-clés : suite, vecteur colonne, matrice, matrice diagonale, limite.

Fichiers associés : FluxPopulations2_eleve.pdf, populations2_prof.tns.

1. Objectifs

- Déterminer l'évolution de la population de trois villes sachant que la population totale de ces trois villes est constante.
- Utiliser le calcul matriciel de l'application Calculs de la calculatrice ou du logiciel TI-Nspire CAS.

2. Énoncé

On considère trois villes, notées respectivement A, B et C.

On modélise les flux de population en énonçant les hypothèses suivantes :
– La population totale des trois villes reste constante.
– Chaque année la ville A perd 8 % de sa population, mais accueille 8 % de la population de la ville B et 2 % de la population de la ville C.
– Chaque année la ville B perd 8 % de sa population, mais accueille 8 % de la population de la ville A et 2 % de la population de la ville C.
– Chaque année la ville C perd 4 % de sa population.
Au premier janvier 2010, les villes A, B et C comptaient respectivement 40 000, 25 000 et 15 000 habitants.

On désigne par a_n, b_n et c_n les nombres d'habitants respectifs des villes A, B et C au premier janvier de l'année 2010 + n. On admettra, pour l'étude mathématique, que les nombres réels a_n, b_n et c_n peuvent ne pas être entiers.

On se propose de conjecturer les limites éventuelles des suites (a_n), (b_n) et (c_n), puis de démontrer les résultats conjecturés.

3. Commentaires

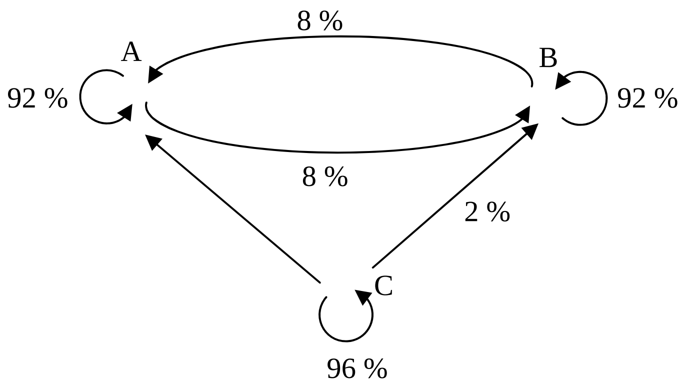
Plusieurs pistes de recherche peuvent être explorées :
- utiliser un tableur et créer un programme (niveau 1^re S et Terminale S), traitées dans les fichiers FluxPopulations_prof.pdf, FluxPopulations_eleve.pdf, populations_prof.tns.
- calculer avec des matrices (niveau Spécialité de Terminale S), traitée dans ce document et correspondant au fichier élève : FluxPopulations2_eleve.pdf. L'activité précédente FluxPopulations, en totalité ou en partie (tableur), pourra être traitée avec profit, avant d'aborder cette activité utilisant le calcul matriciel.

4. Conduite de l'activité

1) Conjecturer

a) Le graphe probabiliste ci-contre peut résumer l'énoncé.

On a donc :
$a_{n+1} = 0,92\, a_n + 0,08\, b_n + 0,02\, c_n$,
$b_{n+1} = 0,08\, a_n + 0,92\, b_n + 0,02\, c_n$
et $c_{n+1} = 0,96\, c_n$.



b) Si l'on nomme V_n et V_{n+1} les vecteurs colonnes constitués des trois effectifs respectivement à l'instant n et à l'instant $n + 1$, on a : $V_0 = \begin{pmatrix} 40\,000 \\ 25\,000 \\ 15\,000 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 0{,}92 & 0{,}08 & 0{,}02 \\ 0{,}08 & 0{,}92 & 0{,}02 \\ 0 & 0 & 0{,}96 \end{pmatrix}$.

Alors, pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = M \times V_n$.

c) On définit, dans une page **Calculs**, le vecteur colonne V_0 et la matrice M.

d) En calculant $M^{1000} \times V_0$, on pressent que les limites des trois suites (a_n), (b_n) et (c_n) sont respectivement 40 000, 40 000 et 0.

→ Pour **c** et **d**, voir fichier populations2_prof.tns, page 1

2) Démontrer

→ Pour **a**, **b**, **c** et **e**, voir fichier populations2_prof.tns, page 2

→ Pour **f** et **g**, voir fichier populations2_prof.tns, page 3

a) Soit d une matrice 3×3 diagonale : $d = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix}$ et n un entier naturel. Alors $d^2 = \begin{pmatrix} f^2 & 0 & 0 \\ 0 & g^2 & 0 \\ 0 & 0 & h^2 \end{pmatrix}$.

On en déduit aisément que $d^n = \begin{pmatrix} f^n & 0 & 0 \\ 0 & g^n & 0 \\ 0 & 0 & h^n \end{pmatrix}$ (récurrence triviale).

b) On pose : $i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On vérifie aisément, par exemple avec le logiciel, en prenant une matrice 3×3 quelconque, que, pour toute matrice q, on a : $q \times i = i \times q = q$.

c) On vérifie que si $p = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ et $p1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, alors, $p \times p1 = i$. On pose : $p1 = p^{-1}$.

d) On suppose qu'une matrice m et une matrice d vérifient l'égalité : $m = p \times d \times p^{-1}$.
Alors, $m^2 = (p \times d \times p^{-1}) \times (p \times d \times p^{-1}) = p \times d \times (p^{-1} \times p) \times d \times p^{-1} = p \times d \times i \times d \times p^{-1} = p \times d^2 \times p^{-1}$.
On en déduit, par une récurrence triviale, que, pour tout entier naturel n, $m^n = p \times d^n \times p^{-1}$.

e) On considère la matrice M de la partie 1 et les matrices p et p^{-1} de la question **2 c**.

Soit la matrice $D = \begin{pmatrix} \frac{21}{25} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{24}{25} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On vérifie que $M = p \times D \times p^{-1}$.

f) D'après la question **a**, la matrice D étant diagonale, on a : $D^n = \begin{pmatrix} \left(\frac{21}{25}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{24}{25}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

En utilisant le résultat de la question **d**, on peut calculer la matrice M^n, puis le produit $M^n \times V_0$:

$$M^n = \begin{bmatrix} \frac{\left(\frac{21}{25}\right)^n}{2}+\frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\frac{\left(\frac{21}{25}\right)^n}{2} & \frac{1}{2}-\frac{\left(\frac{24}{25}\right)^n}{2} \\ \frac{1}{2}-\frac{\left(\frac{21}{25}\right)^n}{2} & \frac{\left(\frac{21}{25}\right)^n}{2}+\frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\frac{\left(\frac{24}{25}\right)^n}{2} \\ 0 & 0 & \left(\frac{24}{25}\right)^n \end{bmatrix} \qquad M^n \times V_0 = \begin{bmatrix} 2500\cdot\left(\frac{1}{25}\right)^n\cdot\left(-3\cdot 24^n+3\cdot 21^n+16\cdot 25^n\right) \\ -2500\cdot\left(\frac{1}{25}\right)^n\cdot\left(3\cdot 21^n+3\cdot 24^n-16\cdot 25^n\right) \\ 15000\cdot\left(\frac{24}{25}\right)^n \end{bmatrix}$$

g) Le logiciel donne alors pour limite de $M^n \times V_0$. Le vecteur colonne : $\begin{bmatrix} 40000 \\ 40000 \\ 0 \end{bmatrix}$

On obtient ainsi les limites des suites (a_n), (b_n) et (c_n), soit 40 000, 40 000 et 0.

Annexe

Compléments pour le professeur

Les programmes prédéfinis de TI-Nspire concernant le calcul matriciel permettent d'obtenir très rapidement les matrices évoquées dans la troisième partie.
Comme précédemment, dans la suite, on note :

$$m = \begin{pmatrix} \frac{92}{100} & \frac{8}{100} & \frac{2}{100} \\ \frac{8}{100} & \frac{92}{100} & \frac{2}{100} \\ 0 & 0 & \frac{96}{100} \end{pmatrix},\ i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'enjeu est de parvenir à calculer la matrice m^n. Pour ce faire on tente de diagonaliser la matrice m.

Recherche de la matrice diagonale *d* → voir fichier populations_annexe.tns, activité 1

a) Recherche des valeurs propres ·

On factorise le déterminant : $\det(x\cdot i - m)$. On trouve : $\det(x\cdot i - m) = (x - 1)\ (x - \frac{24}{25})\ (x - \frac{21}{25})$.

L'équation d'inconnue x : $\det(x\cdot i - m) = 0$ adonc trois solutions distinctes, appelées valeurs propres.

b) Recherche des sous-espaces propres
A chaque valeur propre x_i est associé un sous-espace propre E_{xi} défini par $E_{xi} = \mathrm{Ker}(m - x_i\cdot i)$.

La résolution de $(m - \frac{21}{25} i)\cdot X = 0$ donne le vecteur $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ou l'un de ses multiples non nuls,

$(m - \frac{24}{25} i)\cdot X = 0$ donne le vecteur $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ou l'un de ses multiples non nuls,

$(m - i)\cdot X = 0$ donne le vecteur $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ou l'un de ses multiples non nuls.

Ces trois vecteurs propres forment une base. .La matrice m est donc diagonalisable.

c) Diagonalisation de m
On considère la matrice p définie à partir des trois vecteurs X_1, X_2 et X_3. La matrice diagonale est alors donnée par : $d = p^{-1}\cdot m\cdot p$.

On prend : $p = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, et on obtient bien $d = \begin{pmatrix} \frac{21}{25} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{24}{25} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Obtention directe de la matrice diagonale avec le logiciel TI-Nspire
→ voir fichier populations_annexe.tns, activité 2

Le logiciel TI-Nspire permet d'obtenir directement la matrice diagonale.

Recourir aux **Bibliothèques**. Choisir la bibliothèque **linalgcas**.

L'instruction **linalgcas\ceigenvals(*m*)** donne les valeurs propres.
linalgcas\diagonalization(*m*) donne les vecteurs propres, bases des sous-espaces propres associés aux valeurs propres, la matrice de « passage » *p* et la matrice diagonale *d*.

On vérifie bien, page 1, que $p \cdot d \cdot p^{-1} = m$.

En page 2, figure la fin de la résolution du problème posé (limites des trois suites (a_n), (b_n) et (c_n)).