FLUX DE POPULATIONS (2)

TI-Nspire™ CAS

Mots-clés : suite, vecteur colonne, matrice, matrice diagonale, limite.

1. Objectifs

• Déterminer l'évolution de la population de trois villes sachant que la population totale de ces trois villes est constante.
• Utiliser le calcul matriciel de l'application Calculs de la calculatrice ou du logiciel TI-Nspire CAS.

2. Énoncé

On considère trois villes, notées respectivement A, B et C.

On modélise les flux de population en énonçant les hypothèses suivantes :
– La population totale des trois villes reste constante.
– Chaque année la ville A perd 8 % de sa population, mais accueille 8 % de la population de la ville B et 2 % de la population de la ville C.
– Chaque année la ville B perd 8 % de sa population, mais accueille 8 % de la population de la ville A et 2 % de la population de la ville C.
– Chaque année la ville C perd 4 % de sa population.
Au premier janvier 2010, les villes A, B et C comptaient respectivement 40 000, 25 000 et 15 000 habitants.

On désigne par a_n, b_n et c_n les nombres d'habitants respectifs des villes A, B et C au premier janvier de l'année 2010 + n. On admettra, pour l'étude mathématique, que les nombres réels a_n, b_n et c_n peuvent ne pas être entiers.

On se propose de conjecturer les limites éventuelles des suites (a_n), (b_n) et (c_n), puis de démontrer les résultats conjecturés.

3. Conduite de l'activité

1) Conjecturer

a) Déterminer, à l'aide des hypothèses, les relations liant a_n, b_n et c_n.

b) On pose $V_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. De même, V_{n+1} est le vecteur colonne constitué des trois effectifs à l'instant $n + 1$.

Déterminer la matrice M telle que $V_{n+1} = M \times V_n$.

c) Ouvrir, dans TI-Nspire, une page Calculs.
Définir le vecteur colonne V_0 et la matrice M.

Procédure :
menu (Modèles mathématiques). Choisir et préciser le nombre de lignes et de colonnes de la matrice.

On peut aussi saisir directement la matrice ligne par ligne en séparant chaque ligne par un point virgule, les nombres de chaque ligne étant séparés par des virgules. Par exemple, [1,2,3;4,5,6;7,8,9] donne la matrice de première ligne 1 2 3, de deuxième ligne 4 5 6, etc.

d) Avec TI-Nspire, calculer V_2 puis V_{1000} .

Que peut-on conjecturer à propos des limites des trois suites (a_n), (b_n) et (c_n) ?

2) Démontrer

a) Soit d une matrice 3×3 diagonale : $d = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix}$ et n un entier naturel.

Déterminer d^2, puis d^5 à l'aide de TI-Nspire. En déduire la matrice d^n.

b) On pose : $i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Vérifier, avec le logiciel ou la calculatrice, que, pour toute matrice q, 3×3, on a : $q \times i = i \times q = q$.

c) Vérifier, avec TI-Nspire, que si $p = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ et $p1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, alors, $p \times p1 = i$.

De la même façon que dans l'ensemble des nombres réels, on pourra affirmer que la matrice $p1$ est l'inverse de la matrice p. On écrit : $p1 = p^{-1}$.

d) On suppose qu'une matrice m et une matrice d vérifient l'égalité : $m = p \times d \times p^{-1}$.
Déterminer m^2 en fonction de d, p et p^{-1}.
En déduire m^n en fonction de d, p et p^{-1}, où n est un entier naturel quelconque.

e) On considère la matrice M de la partie 1 et les matrices p et p^{-1} de la question **2 c**.

Soit la matrice $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} \frac{21}{25} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{24}{25} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifier, avec TI-Nspire, que $\mathrm{M} = p \times \mathrm{D} \times p^{-1}$.

f) Déterminer la matrice D^n.

En utilisant le résultat de la question **d** et TI-Nspire, calculer la matrice M^n, puis le produit $\mathrm{M}^n \times \mathrm{V}_0$.

g) Déterminer la limite, quand n tend vers $+\infty$, de $\mathrm{M}^n \times \mathrm{V}_0$. Vérifier avec la calculatrice (ou le logiciel).

On obtient ainsi les limites des suites (a_n), (b_n) et (c_n).