Undersökning av primitiva funktioner

Mål för aktiviteten Att få en god förståelse av primitiva funktioner genom att konstruera grafen av den primitiva funktionen till en given funktion *f*(*x*).

Nödvändiga förkunskaper
Känna till begreppet integral definierad med hjälp av arean mellan funktionsgrafen och *x*-axeln. Någon erfarenhet av att använda TI-Nspire.

Uppgift är att

- inledningsvis studera andragradsfunktionen $y = x^2 - x - 1$ och arean mellan grafen och x-axeln.
- följa grafen av den primitiva funktionen genom att studera intervallgränsernas betydelse för integralen.
- studera hur intervallgränserna påverkar utseendet hos grafen av den primitiva funktionen.
- konstruera de primitiva funktionerna till funktionen $y = x^2 - x - 1$. Därefter variera koefficienter i andragradspolynomet för att dels observera att den primitiva funktionen till ett andragradspolynom alltid blir ett tredjegradspolynom och se ett mönster mellan koefficienterna i funktionen och dess primitiva funktion.

Alla beskrivningar för konstruktionerna finns i filen *Undersökning av primitiva funktioner elevdokument.tns*

Presentationen ser ut så här:

Undersökning av primitiva funktioner

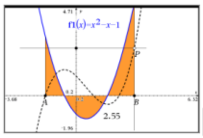
- Öppna en sida med applikationen Grafer.
- Rita funktionen $f1(x)=x^2-x-1$.
- Välj geometriverktyget **Punkt på** och klicka på *x*−axeln. Döp med Etikett punkten till *A*. Upprepa för ytterligare en punkt *B* till höger om den förra, också på *x*−axeln.

- Välj analysverktyget **Integral** och klicka först på kurvan, sedan på punkten A, vänstra gränsen, och sedan på B, högra gränsen. Värdet på integralen dyker upp på skärmen.
- Flytta på *A* och *B*. Vad händer?
- När är integralens värde så litet som möjligt?
- Välj **Konstruktion, Mätningsöverföring.** Klicka på mätvärdet för integralen, sedan på *y*−axeln. En punkt visas på *y*−axeln.

- Konstruera nu en linje *vinkelrätt* mot *y*−axeln genom denna punkt (välj **Konstruktion, Vinkelrät).** Klicka först på värdet sedan på y−axeln.
- Konstruera en linje *vinkelrätt* mot *x*−axeln genom punkten B.
- Bestäm skärningspunkten, *P,* mellan dessa båda linjer (**Punkter och linjer** och sedan **Skärningspunkt**). Välj Attribut och markera *P* med en öppen cirkel.

För att se vilken kurva punkten *P* följer, gör så här:

- Välj **Konstruktion** och sedan **Ort.**
- Klicka först på punkten *P* sedan på punkten *B*.
- Den ritade kurvan är en av de primitiva funktionerna till f1(x). Se figuren.



- Välj **Dölj/Visa** och dölj linjerna och mätetalet för integralen.
- Välj **Visa, Visa rutnät.**
- Studera hur punkten *P* förflyttas då du flyttar punkten *B* längs *x*−axeln.
- Vad händer då du istället flyttar punkten A. (OJ DÅ!)
- Skriv ner dina iakttagelser!

En primitiv funktion har egenskapen att då den deriveras får man den ursprungliga funktionen.

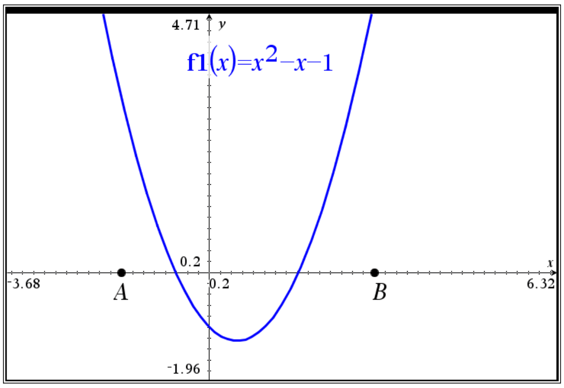
- Försök tänka ut hur denna funktion ser ut och skriv in den som f2(x). Stämmer det eller ej?
- Skriv ner dina slutsatser!
- Variera koefficienterna i f1(x) för att bekräfta dina iakttagelser.

Läraranvisning

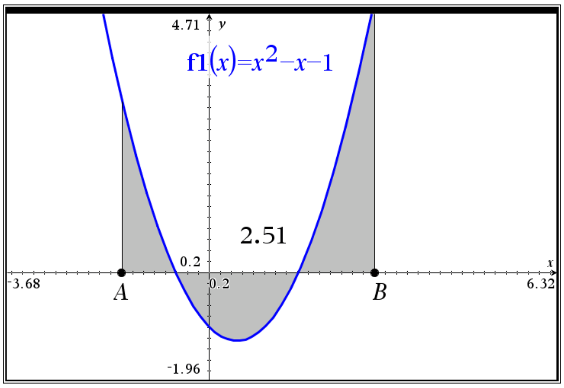
Eleverna öppnar en sida med appen Grafer Därefter definieras funktionen

$$f1(x) = x^2 - x - 1$$

Nästa steg är att skapa två dragreglage på *x*-axeln. Detta sker genom att använda *Punkter och linjer, Punkt på* och klicka på *x*-axeln. Man sätter etiketten A på punkten och upprepar för ytterligare en punkt B till höger om den förra. Genom att använda *Attribut* kan punkterna visas som lite större. Se bild nedan.



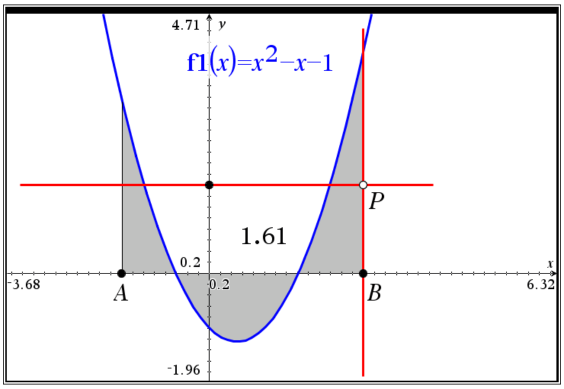
Med analysverktyget *Integral b*eräknas integralen av funktionen mellan gränserna *A* och *B*. Klicka först på kurvan, sedan på *A* och slutligen på *B*. Mätvärdet redovisas i anslutning till det skuggade området.



Flytta punkterna a och b för att observera resultatet. Kontrollera att eleverna förstår hur integralen kan bli negativ och även noll då *a* ligger till vänster om *b*. Låt också eleverna upptäcka vad som händer då b ligger vänster om *a*.

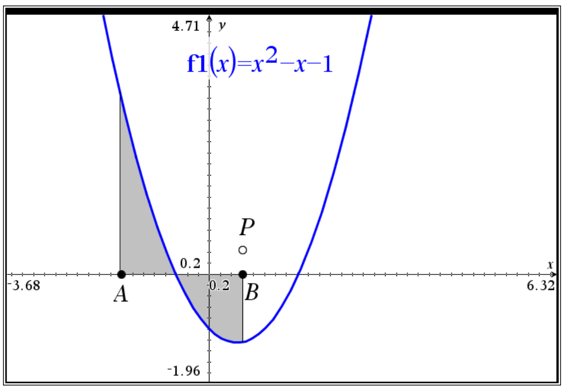
För över integralens *värde* till *y*-axeln genom att använda *Konstruktion, Mätningsöverföring*. Klicka först på värdet sedan på *y*-axeln. Denna uppenbarar sig som en punkt.

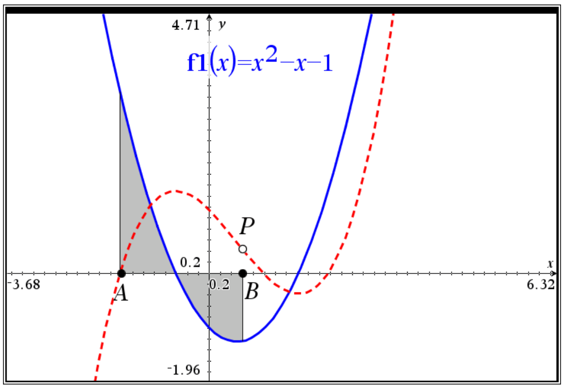
Konstruera nu en linje *vinkelrätt* mot *y*-axeln genom punkten och ytterligare en genom punkten *b* vinkelrät mot x-axeln (*Konstruktion, Vinkelrät*). Bestäm skärningspunkten, *P*, mellan dessa linjer (*Punkter och linjer, Skärningspunkt*). Använd *Attribut* att markera punkten med en öppen cirkel.



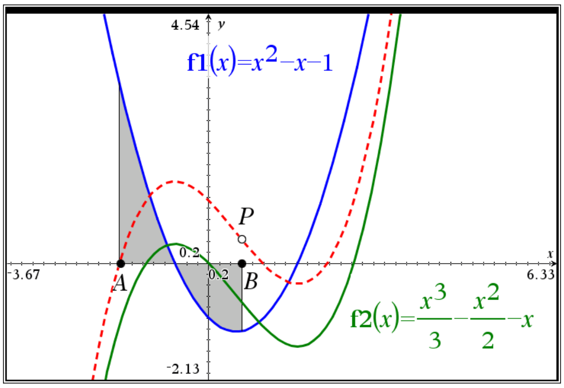
Använd *Dölj/Visa* för att ta bort onödiga konstruktionslinjer. Studera vad som händer med punkten *P* då *B* flyttas längs *x*-axeln. Vilken typ av kurva följer P? Vad sker om *B* ligger stilla och a flyttas?

Använd nu *Konstruktion, Ort* och klicka först på punkten *P* sedan på punkten *b* på x-axeln. Orten för punkten *P* dyker upp som graf. Använd *Attribut* att markera denna streckad. Flytta nu först punkten *B* sedan punkten *A* och observera vad som händer. Se bilderna nedan och på nästa sida..

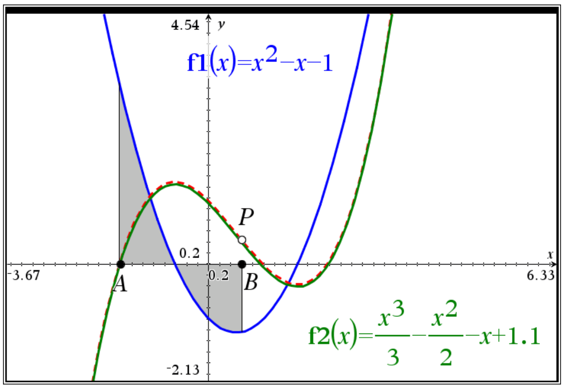




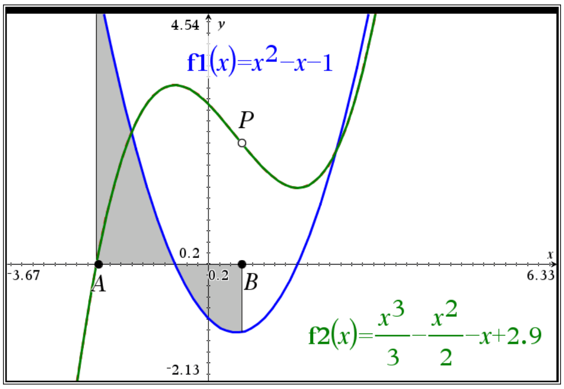
Med kännedom om att den primitiva funktionen, *F(x)*, är den funktion som då den deriveras ger den ursprungliga *f(x)*, dvs. *F´(x) = f(x)*, kan eleverna genom prövning försöka finna den tredjegradsfunktion som har ritats. Genom detta får eleverna en känsla för ”den godtyckliga konstanten” i den primitiva funktionen.



Genom att redigera *f2(x)* ska de försöka matcha den streckade kurvan. Se bilden nedan.

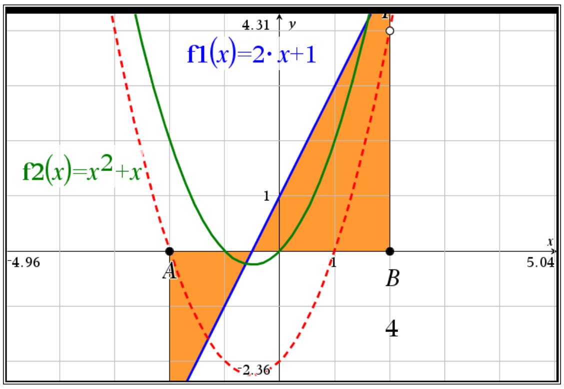


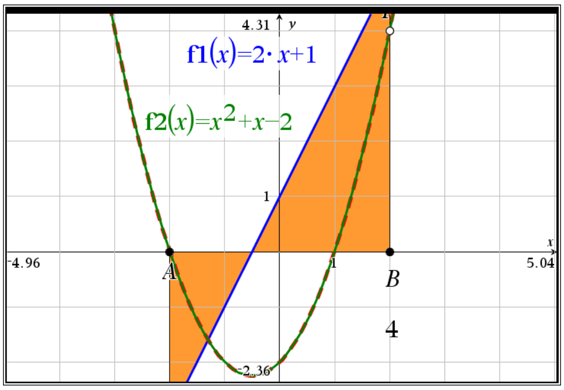
Uppmuntra också eleverna att flytta punkten A för att få god förståelse. Se den bilden i nästa spalt där *A* har ett annat värde och *f2(x)* har redigerats.



Eleverna bör nu ändra koefficienterna i sitt andragradspolynom för att se konsekvenserna av dessa förändringar. Även här bör de uppmuntras leka med intervallgränserna och att försöka finna uttrycket för den tredjegradsfunktion som ritats.

Uppmana eleverna att också studera linjära funktioner.





Perfekt överlappning av kurvorna.