S2f – SUITES RÉCURRENTES IMBRIQUÉES

TI-89 – Voyage™ 200

Mots-clés : suites, suites récurrentes, convergence, limite.

1. Objectifs

Apprendre à définir et à utiliser des suites auxiliaires.

2. Énoncé

Voir fiche élève.
Soit a et b deux suites définies par $a_0 = 2$ et $b_0 = 4$ et pour tout entier naturel n,

$$a_{n+1} = \frac{a_n + 3b_n}{4} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{3a_n + b_n}{4}.$$

On se propose d'établir les formules donnant directement a_n et b_n en fonction de n, en utilisant deux suites auxiliaires.

3. Commentaires

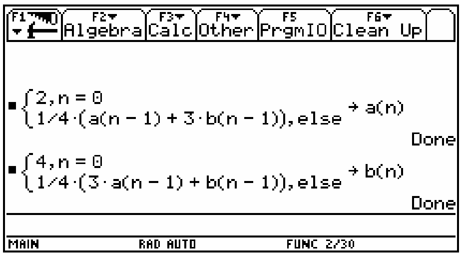
Les exercices sur les suites imbriquées sont la plupart du temps très guidés, les calculs sont longs et les conjectures pratiquement impossibles à mettre en place. Ainsi les énoncés fournissent de façon traditionnelle les deux suites auxiliaires à mettre en œuvre pour aboutir aux expressions de a_n et b_n en fonction de n. En effet, le calcul des premiers termes de la suite ne fait pas découvrir de méthode pertinente permettant de déterminer a_n et b_n en fonction de n.
Le calcul formel va – chose nouvelle – autoriser à prendre des valeurs génériques pour les premiers termes de chaque suite. On bloque, en quelque sorte, les calculs et on voit apparaître des caractéristiques communes aux termes a_1 et b_1 , a_2 et b_2 , a_3 et b_3 . Les suites auxiliaires à considérer émergeront alors de façon beaucoup moins artificielle.

4. Mise en œuvre

Partie A : définition des suites et premiers calculs

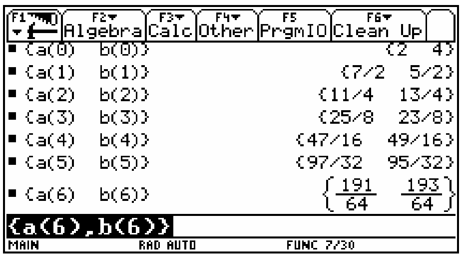
Les suites (a_n) et (b_n) sont définies par les séquences suivantes (*écran* 1) :

When(n=0,2,1/4*(a(n-1)+3*b(n-1))) → a(n)
When(n=0,4,1/4*(3*a(n-1)+b(n-1))) → b(n)



écran 1

On obtient alors les valeurs exactes des premiers termes de chaque suite (*écran* 2).

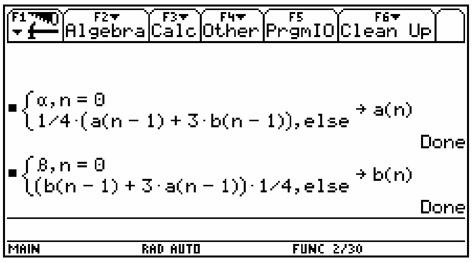


écran 2

Partie B : changement de suites

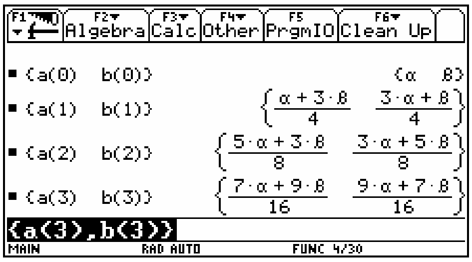
On prend à présent comme valeurs α et β pour a_0 et b_0 . Inutile de tout retaper, on rappelle les définitions précédentes dans la barre d'entrée et on change uniquement les valeurs pour $n = 0$ (*écran* 3) :

When(n=0,α,1/4*(a(n-1)+3*b(n-1))) → a(n)
When(n=0,β,1/4*(3*a(n-1)+b(n-1))) → b(n)



écran 3

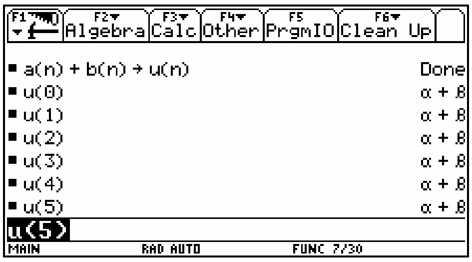
Les valeurs des premiers termes de chaque suite sont alors obtenues en tapant les mêmes séquences que dans la première partie (*écran* 4).



écran 4

Définition des suites auxiliaires.

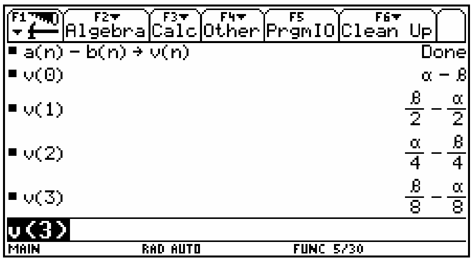
La suite (u_n) est la somme des deux suites :
a(n) + b(n) → u(n).
Les résultats figurent dans l'*écran* 5.



écran 5

La suite (v_n) est une différence :
a(n) – b(n) → v(n).
Les résultats figurent dans l'*écran* 6.

On démontre ensuite les résultats conjecturés par la machine : $a_{n+1} + b_{n+1} = a_n + b_n$; la suite (u_n) est constante ; $a_{n+1} - b_{n+1} = -\dfrac{1}{2}\,(a_n - b_n)$; la suite (v_n) est géométrique de raison $-\dfrac{1}{2}$.



écran 6

Partie C : Retour aux suites initiales

$\begin{cases} a_n + b_n = 6 \\ a_n - b_n = -2\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n \end{cases}$; on obtient : $a_n = 3 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$ et $b_n = 3 + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Nom : ………………………………………………………………..…. Classe : ………………………

S2f – SUITES RÉCURRENTES IMBRIQUÉES

Soit a et b deux suites définies par $a_0 = 2$ et $b_0 = 4$ et pour tout entier naturel n,

$$a_{n+1} = \frac{a_n + 3b_n}{4} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{3a_n + b_n}{4}.$$

Le calcul des premiers termes de la suite ne fait pas découvrir de méthode pertinente permettant de déterminer a_n et b_n en fonction de n. En donnant des valeurs génériques α et β à a_0 et b_0, on met en exergue le mode de calcul des termes successifs. On introduit alors deux suites convenablement choisies afin d'obtenir des formules donnant directement a_n et b_n en fonction de n.

1) a) Calculer pour chacune de ces deux suites les trois premiers termes.

b) Vérifier les résultats de la question **a** avec la calculatrice après avoir défini les deux suites à l'aide des séquences suivantes :

When(n=0,2,1/4*(a(n-1)+3*b(n-1))) → a(n)
When(n=0,4,1/4*(3*a(n-1)+b(n-1))) → b(n)

c) Déterminer avec la calculatrice les valeurs exactes de a_3 et b_3, de a_4 et b_4, et de a_5 et b_5.

2) *Dans cette partie, on se propose d'analyser les calculs produits par la calculatrice.*
Soit les suites (a_n) et (b_n) définies par : $a_0 = \alpha$ et $b_0 = \beta$ et les mêmes relations de récurrence.

a) Reprendre les définitions des deux suites du **1 b** et transformer les termes initiaux de chacune d'entre elles.

When(n=0,α,1/4*(a(n-1)+3*b(n-1))) → a(n)
When(n=0,β,1/4*(3*a(n-1)+b(n-1))) → b(n)

b) Faire produire les quatre premiers termes de chacune de ces suites.

c) Que remarque-t-on quant aux dénominateurs et aux coefficients de α et β dans les expressions de a_1 et b_1 ? de a_2 et b_2 ? de a_3 et b_3 ?

d) Définir les suites (u_n) et (v_n) à l'aide des séquences suivantes :

a(n) + b(n) → u(n)
a(n) – b(n) → v(n).

Au regard de la réponse à la question **c**, qu'y a-t-il de judicieux à considérer ces 2 suites ?
Montrer que la suite (u_n) est constante et que la suite (v_n) est géométrique.

3) Dans la suite, on prend de nouveau : $\alpha = 2$ et $\beta = 4$.
A l'aide de la réponse à la question précédente exprimer u_n et v_n en fonction de n.
En déduire a_n et b_n en fonction de n.

