EP 005 – 2007 : Suite définie par récurrence

Auteur du corrigé : Alain Soléan **TI-Nspire™ / TI-Nspire™ CAS**

***Avertissement** : ce document a été réalisé avec la version 1.4 ; il est disponible dans sa version la plus récente sur notre site http://education.ti.com/france, menu Ressources pédagogiques.*

Fichier associé : EP005_2007_SuiteRécurrente.tns

1. Le sujet

Sujet 005 de l'épreuve pratique 2007 – Comportement d'une suite définie par une relation de récurrence

Enoncé

Une suite v est définie par son premier terme v_0 et par la relation de récurrence :

pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = -\frac{1}{2} v_n + 6$.

1. A l'aide de la calculatrice ou du tableur, émettre une conjecture sur la limite l de la suite v, selon les valeurs de v_0

2. La suite w est définie pour tout entier naturel n par $w_n = v_n - l$

a) Observer, à la calculatrice ou au tableur, les premiers rangs de la suite w.

Quelle semble être la nature de la suite w ? est-elle arithmétique ? géométrique ? ni arithmétique ni géométrique ?

b) Démontrer la propriété conjecturée sur la suite w.

c) Exprimer, pour tout entier naturel n, w_n puis v_n en fonction de n.

d) Déterminer la limite de la suite v.

e) Ce résultat est-il cohérent avec l'expérimentation ?

Production demandée

- Réponses écrites pour les questions **2. b)**, **2. c)** , **2. d)** et **2. e)**.

Compétences évaluées

- **Compétences TICE**
  - Utiliser une calculatrice ou un tableur pour étudier une suite définie par récurrence.
  - Représenter les termes d'une suite récurrente.
- **Compétences mathématiques**
  - Reconnaître une suite arithmétique, géométrique.
  - Déterminer la limite d'une suite.

2. Corrigé

1) Ouvrir une page **Tableurs & listes** (cf. page suivante).

Dans la cellule **A1**, placer 0, puis dans la cellule **A2**, inscrire la formule **= A1 + 1** .

Copier cette cellule, sélectionner les cellules de **A3** à **A39** et coller la formule (la colonne **A** contiendra donc les valeurs de n).

Dans la cellule **B1**, placer une valeur pour v_0 , puis dans la cellule **B2**, inscrire la formule **= - B1 / 2 + 6** .

Copier cette cellule, sélectionner les cellules **B3** à **B39** et coller la formule (la colonne **B** contiendra donc les valeurs de v_n).

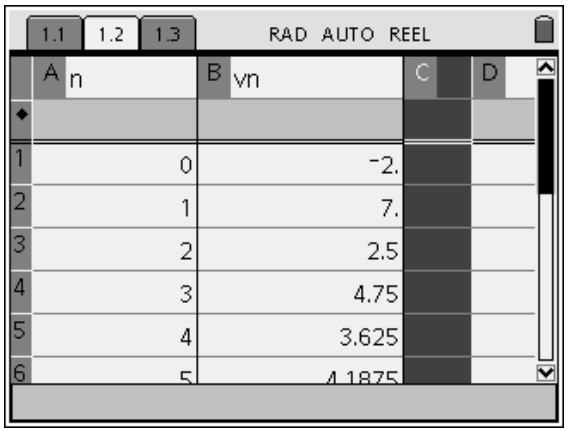
© Texas Instruments 2008 / Photocopie autorisée

On peut nommer les « têtes » de listes **n** et **vn** comme sur l'image ci contre.

En modifiant la valeur contenue dans **B1**, on peut émettre la conjecture suivante :

pour différentes valeurs de v_0 , la suite *v* semble converger vers *l* = 4.

Les écrans sont obtenus à partir de la calculatrice.



2) a) D'après la conjecture précédente : $l = 4$, on pose donc $w_n = v_n - 4$.

Sur la page précédente, dans la cellule **C1**, inscrire la formule **= B1 – 4** .

Copier cette cellule, sélectionner les cellules **C2** à **C39** et coller la formule (la colonne **C** contiendra donc les valeurs de w_n).

La suite est-elle arithmétique ?

Dans la cellule **D2**, inscrire la formule **= C2 – C1** .

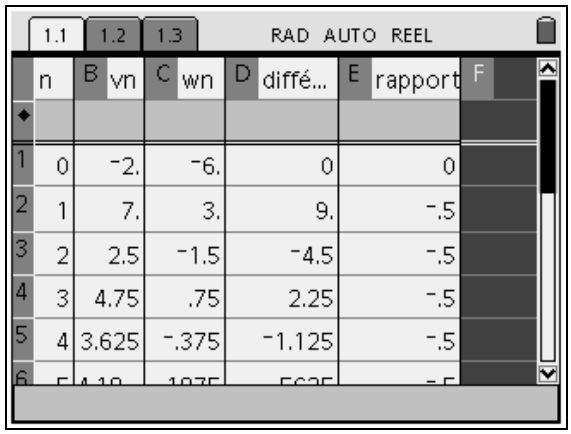
Copier cette cellule, sélectionner les cellules **D3** à **D39** et coller la formule.

Les différences ne sont pas constantes , la suite n'est pas arithmétique.

La suite est-elle géométrique ?

Dans la cellule **E2**, inscrire la formule **= C2/C1** .

Copier cette cellule, sélectionner les cellules **E3** à **E39** et coller la formule.
Les rapports semblent constants ; on conjecture que la suite est géométrique.



b) Montrons que la suite *w* est géométrique.
Pour tout *n* entier naturel, on a :

$w_{n+1} = v_{n+1} - 4$ donc $w_{n+1} = -\frac{1}{2} v_n + 6 - 4$ d'où $w_{n+1} = -\frac{1}{2}(w_n + 4) + 2$.

De là, $w_{n+1} = -\frac{1}{2} w_n$. La suite *w* est donc géométrique de raison $-\frac{1}{2}$ et de premier terme $w_0 = v_0 - 4$.

c) Pour tout *n* entier naturel, on a donc : $w_n = (v_0 - 4)\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ et $v_n = (v_0 - 4)\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 4$.

d) Comme la suite *w* est géométrique de raison $-\frac{1}{2}$, elle converge vers 0, donc la suite *v* converge vers 4.

e) Ce résultat est cohérent avec l'expérimentation menée dans la question **1.**

3. Pour aller plus loin

Le tableur peut nous permettre d'expérimenter le comportement, selon les valeurs de u_0 , de *a* et de *b*, de toute suite *u* définie par son premier terme u_0 et, pour tout entier naturel *n*, par $u_{n+1} = a\,u_n + b$, pour *a* et *b* réels quelconques.

© Texas Instruments 2008 / Photocopie autorisée

Pour cela ouvrir une page **Tableurs & listes**.

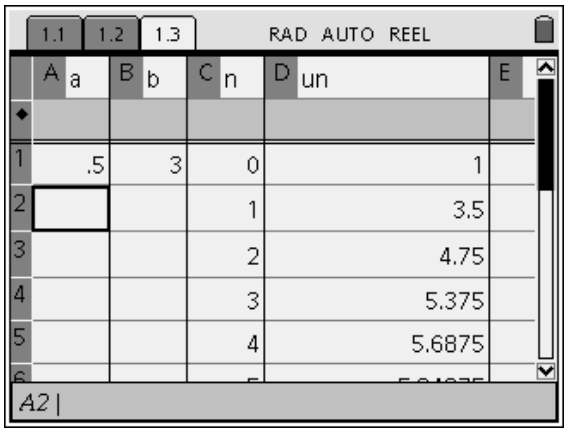
Dans les cellules **A1** et **B1**, placer respectivement les valeurs de *a* et *b*.

Dans la cellule **C1**, placer la valeur 0.
Dans la cellule **C2**, inscrire la formule **= C1 + 1** .
Copier cette formule, sélectionner les cellules de **C3** à **C30** et coller la formule (la colonne **C** contient alors les valeurs de *n*).

Dans la cellule **D1**, placer la valeur de u_0 .
Dans la cellule **D2**, inscrire la formule :

= D1 * A$1 + B$1 .

Copier cette formule, sélectionner les cellules de **D3** à **D30** et coller la formule (la colonne **D** contient alors les valeurs de u_n).



En modifiant les valeurs inscrites dans les cellules **A1** , **B1** ou **D1** on peut donc étudier expérimentalement toute suite définie par son premier terme u_0 et, pour tout entier naturel *n*, par $u_{n+1} = a\,u_n + b$.

On peut ainsi conjecturer que, lorsque $u_0 \neq \frac{b}{1-a}$,

- Si $a < -1$, la suite diverge et n'a pas de limite ;
- Si $a > 1$, la suite diverge et a pour limite $+\infty$ si $u_0 > \frac{b}{1-a}$ et $-\infty$ si $u_0 < \frac{b}{1-a}$;
- Si $-1 < a < 1$ et $a \neq 0$, la suite converge vers $l = \frac{b}{1-a}$;
- Si $a = 1$, la suite est arithmétique de raison b ;
- Si $a = -1$, la suite est alternée et prend les valeurs u_0 et $b - u_0$;
- Si $a = 0$, la suite est constante à partir de u_1 et vaut b.

Enfin, si $u_0 = \frac{b}{1-a}$, la suite est constante.

© Texas Instruments 2008 / Photocopie autorisée