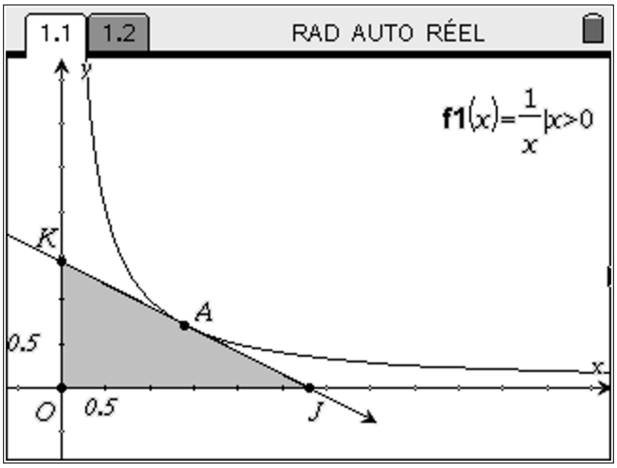
Fonction inverse, tangente et aire d'un triangle…



Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{x}$.
Soit C_f la courbe représentant f dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ orthonormal du plan.

Soit $a\in]0;+\infty[$.
Soit A le point de C_f d'abscisse a.
Soit T_a la tangente à C_f en A.

T_a coupe l'axe (Ox) et l'axe (Oy) en deux points J et K
Le but de cette activité est d'étudier l'aire du triangle OJK lorsque A décrit C_f.

1°) Cas particulier : Dans cette question $a=2$.

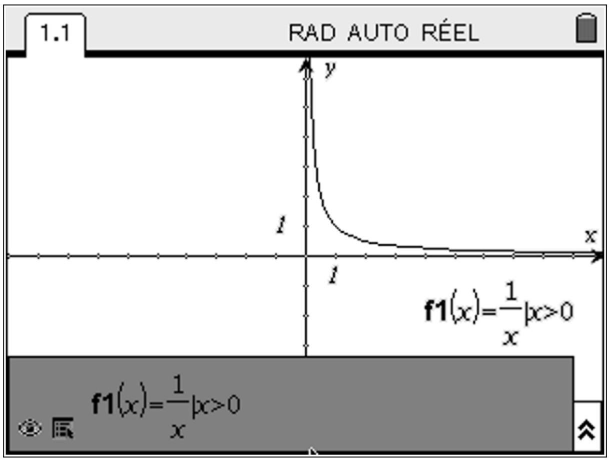
a) A l'aide de la TInspire, construire la figure.
b) Déterminer, à l'aide de la TInspire, l'aire du triangle OJK.
c) Dans une feuille de calcul, déterminer une équation de T_2.
d) Déterminer alors les coordonnées des points J et K. En déduire les longueurs OJ, OK puis le calcul de l'aire du triangle OJK

2°) Cas général. Dans cette question a est un réel positif strict quelconque.

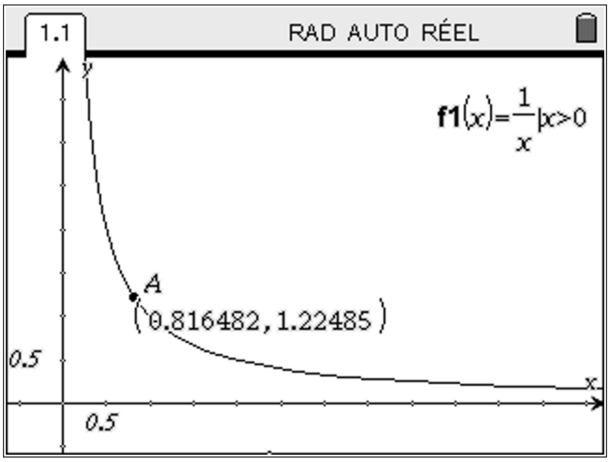
a) Faire parcourir le point A sur la courbe C_f. Emettre une conjecture sur l'aire du triangle OJK ?
b) Dans une feuille de calcul, déterminer une équation de T_a.
c) Déterminer alors les coordonnées des points J et K. En déduire la valeur des longueurs OJ, OK puis le calcul de l'aire du triangle OJK. Votre conjecture du 2°) a) était-elle correcte ?

1°) a) A l'aide de la TInspire, construire la figure.

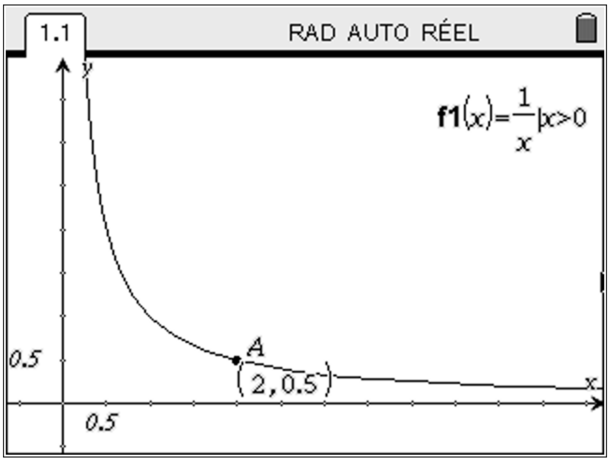
Pour tracer la fonction f il faut spécifier au TInspire l'ensemble de définition de la fonction.
Pour cela on ajoute $|x > 0$ après l'expression de la fonction.



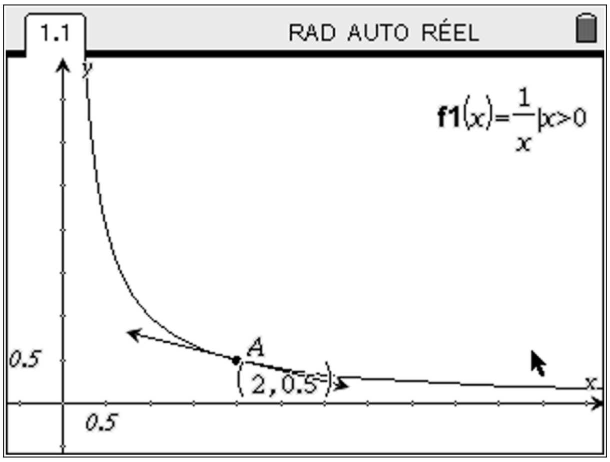
On construit le point A sur C_f (menu **Points et Droites | Point sur**)



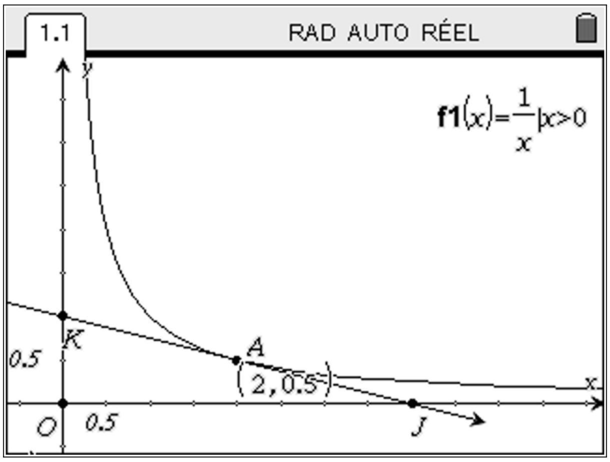
On change la valeur de l'abscisse de A et on entre 2.



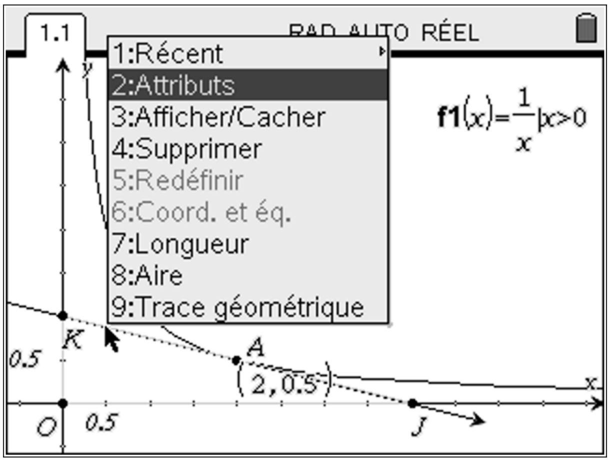
On trace T_2 la tangente à C_f passant par A (menu **Points et Droites | Tangente**)

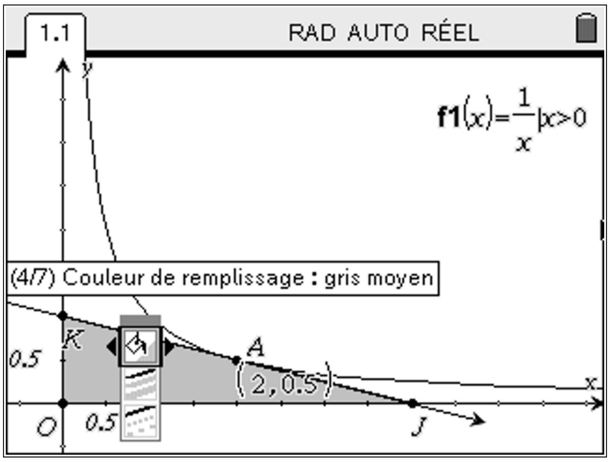


On peut alors construire les points J et K (menu **Points et Droites | Point d'intersection**)



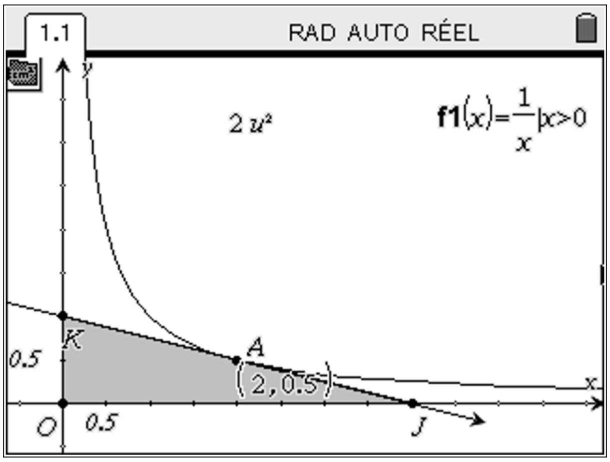
Dessinons le triangle OKJ : menu **Construction | Triangle.** Pour colorier en gris le triangle on fait un clique droit sur le triangle et on choisit **Attributs.** A l'aide de la flèche droite on choisit le gris souhaité :





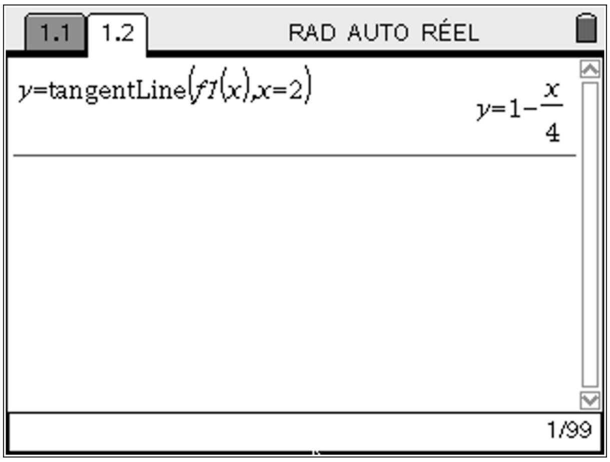
1°) b) Déterminer, à l'aide de la TInspire, l'aire du triangle OJK.

Pour déterminer l'aire du triangle OJK on clique sur menu **Mesure | Aire** et on clique sur le triangle OJK.



1°) c) Dans une feuille de calcul, déterminer une équation de T_2.

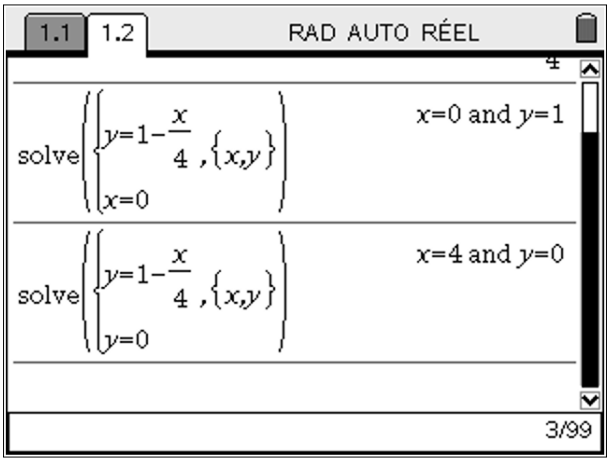
L'instruction pour déterminer une équation de la tangente est **tangentLine**.



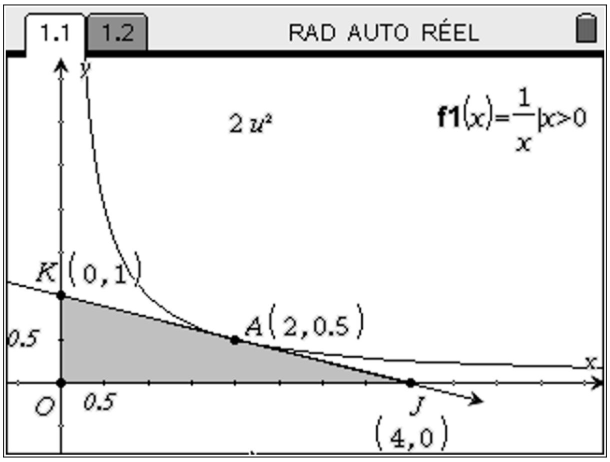
1°) d) Déterminer alors les coordonnées des points J et K. En déduire les longueurs OJ, OK puis le calcul de l'aire du triangle OJK.

On trouve les coordonnées de J et K en résolvant les systèmes ci-contre :

Ainsi $J(4;0)$ et $I(0,1)$

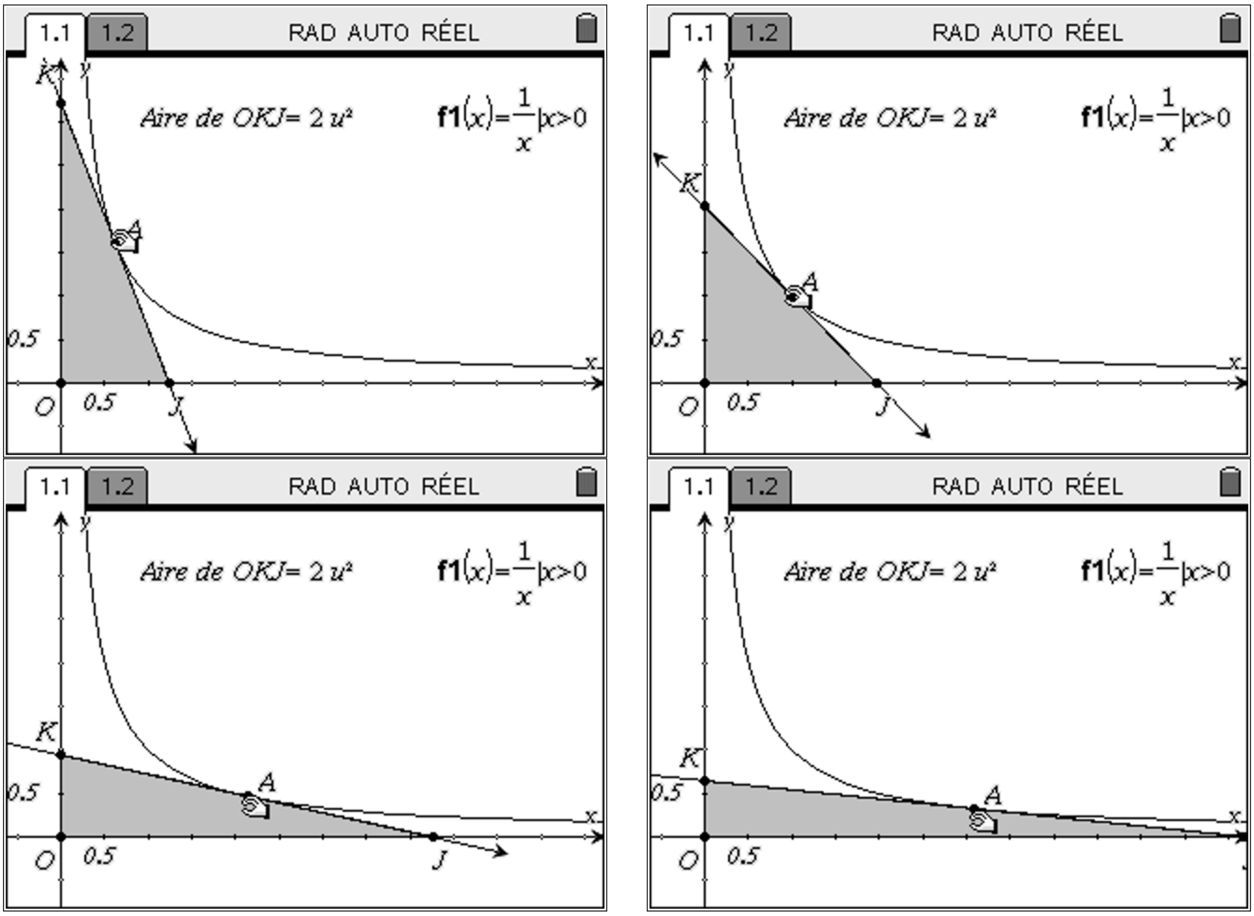


On peut le vérifier en affichant les coordonnées de J et K.



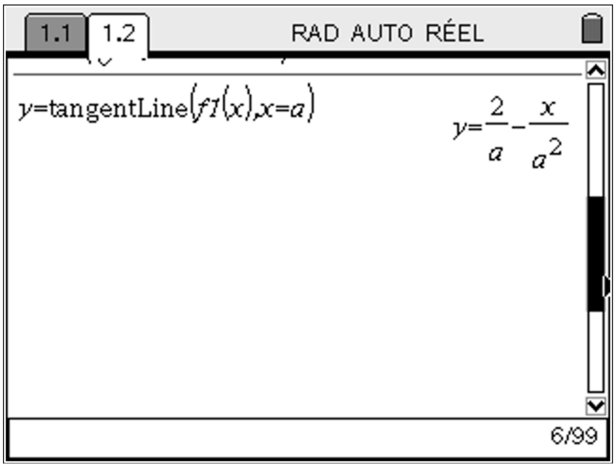
On a $\overrightarrow{OJ}\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OK}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ donc $OJ = 4$ et $OK = 1$ donc l'aire du triangle OJK est $\frac{1}{2} \times 4 \times 1 = 2$.

2°) a) Faire parcourir le point A sur la courbe C_f. Emettre une conjecture sur l'aire du triangle OJK ?

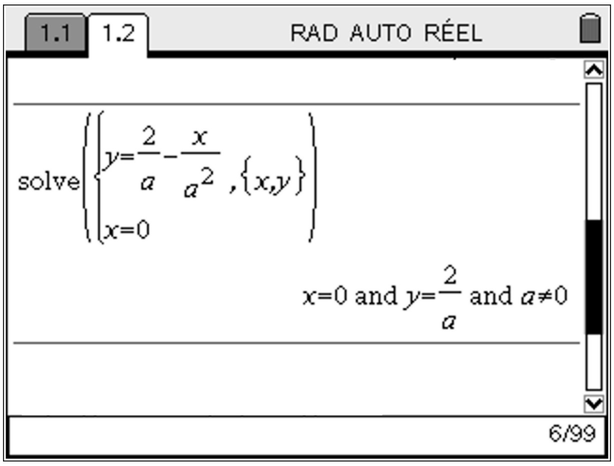


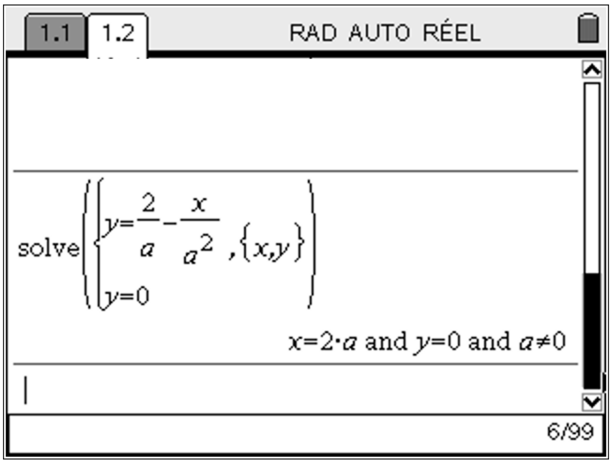
Quelque soit la position du point A sur C_f, l'aire du triangle OJK semble être la même.

2°) b) Dans une feuille de calcul, déterminer une équation de T_a.



2°) c) Déterminer alors les coordonnées des points J et K. En déduire la valeur des longueurs OJ, OK puis le calcul de l'aire du triangle OJK. Votre conjecture du 2°) a) était-elle correcte ?





Ainsi $J\begin{pmatrix}2a\\0\end{pmatrix}$ et $K\begin{pmatrix}0\\\frac{2}{a}\end{pmatrix}$ donc $OJ = 2a$ et $OK = \frac{2}{a}$ on en déduit que l'aire du triangle OJK est $\frac{1}{2} \times \frac{2}{a} \times 2a = 2$

La conjecture est bien vérifiée.