E1n – COMPRENDRE LE FONCTIONNEMENT DES CLEPSYDRES

Auteur : JL Balas sur une idée de J Périès

TI-Nspire™ - TI-Nspire™ CAS

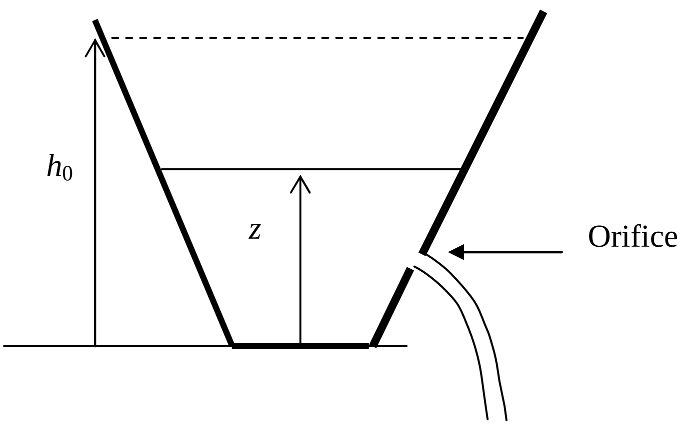
***Avertissement** : ce document a été réalisé avec la version* 1.6

Mots-clés : écoulement fluide, étalonnage, horloge, énergie cinétique, énergie potentielle.

Fichiers associés : E1nElev_Clepsydre.tns, E1nProf_Clepsydre.tns, E1n_Clepsydre_tuyau.tns

O. Préambule

Le cadran solaire présente un inconvénient : il ne permet pas de mesurer des durées en l'absence de soleil, soit la nuit, soit par temps couvert. Les anciens ont eu l'idée d'utiliser l'écoulement de l'eau pour donner l'heure de jour comme de nuit, été comme hiver. Les instruments de mesure du temps basés sur ce principe sont appelés clepsydres. Les premières clepsydres ou horloges à eau fonctionnaient selon le principe suivant : un récipient conique percé d'un trou à sa base est rempli d'eau : lors de l'écoulement de l'eau le niveau de la surface libre s'abaisse, il est alors possible d'établir une relation entre la position h de la surface libre de l'eau et la durée Δt de l'écoulement de l'eau. Les anciens ont fait preuve de beaucoup d'imagination et d'une grande ingéniosité pour obtenir des clepsydres qui donnent des mesures du temps relativement précises et reproductibles.
Actuellement on sait que les plus anciennes horloges à eau du bassin méditerranéen (Egypte) datent



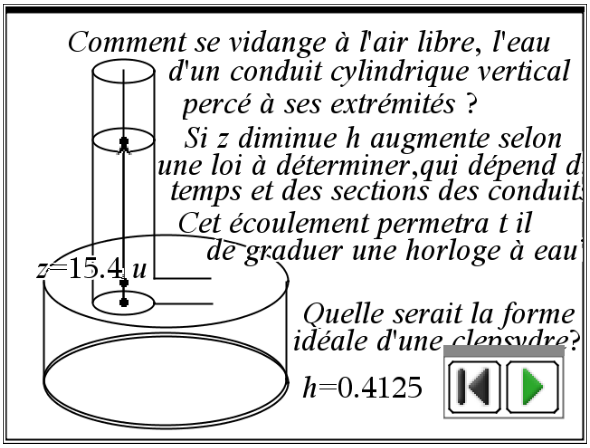
Vases étalons utilisés pour remplir les clepsydres
Musée de l'agora : Athènes

Clepsydre
Musée de l'agora : Athènes

de 1400 av. JC et que certaines ont été utilisées en Europe jusqu'au début du 19° siècle (Musée du temps à Besançon). Les différentes clepsydres retrouvées à ce jour se présentent sous les formes les plus diverses cela va de la clepsydre la plus simple : récipient conique percé d'un trou à sa base à la clepsydre la plus sophistiquée où l'eau qui s'écoule entraîne un mécanisme complexe.

1. Objectifs

- Découvrir les lois du mouvement de l'écoulement de l'eau, libérée à l'air libre à la base d'un réservoir, et source d'énergie hydraulique, grâce à la pesanteur terrestre.
- Expliquer le fonctionnement des clepsydres : horloges à eau antiques constituées d'un réservoir émetteur et d'un réservoir récepteur, qui limitaient autrefois la durée des interventions dans des tribunaux en Grèce.
- Déterminer le profil idéal à donner à la clepsydre pour constituer une horloge à eau fiable.



Animation sur le fichier Clepsydre_tuyau.tns

2. Description du protocole expérimental

On se propose de mesurer, en fonction du temps, le poids d'un réservoir contenant l'eau, qui stagne ou s'écoule. Celui-ci est mesurable, à tout instant, par un capteur de force, qui soutient cet ensemble suspendu en équilibre.

a) Matériel nécessaire

Un capteur de force 50 N -10 N : Un adaptateur Vernier Easy-Link [1]ou Go-Link[2],
Un cristallisoir,
Un support avec noix de serrage,
Un clou de diamètre connu,
Du fil et un petit tube de diamètre connu (éventuellement).

b) Réalisation du montage

Percer le fond ou la face latérale de la bouteille. Lorsque la bouteille est remplie d'eau, celle-ci ne pourra s'évacuer que lorsque le bouchon sera dévissé. Lorsque cessera l'action de la pression atmosphérique exercée par l'eau sur le trou.

La bouteille est préalablement percée sur le fond ou la face latérale à l'aide d'un clou de diamètre connu préalablement chauffé.

Boucher le trou avec un doigt, pour remplir d'eau la moitié de la bouteille.
Revisser le bouchon sur son goulot. La bouteille ne se vide pas, malgré sa base percée, à cause de la pression atmosphérique exercée sur l'eau par le trou.
Suspendre cette bouteille à demi pleine à un capteur de force limité à 10 N, avant d'amorcer sa vidange dans une bassine située plus bas.

Relier le capteur de force au port USB de la calculatrice ou de l'ordinateur par les câbles adaptés : Easy-link ou GO-link.

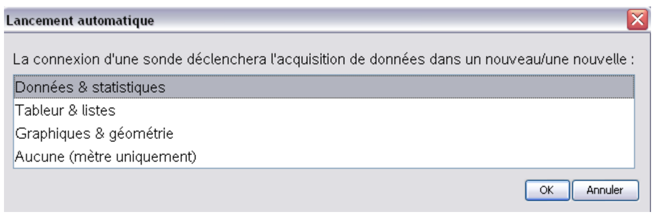
c) Acquisition des données

Configuration de l'acquisition

Mettre l'unité nomade sous tension.

Le capteur de force est automatiquement reconnu par le système. La fenêtre de « *Lancement automatique* » s'ouvre pour proposer l'application dans laquelle on visualisera les données.

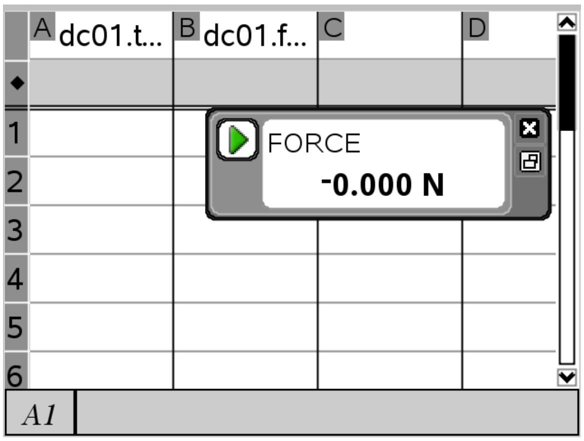
Choisir l'application **Tableur & listes**.



[1] Fonctionne avec l'unité nomade TI-Nspire
[2] Fonctionne avec un ordinateur

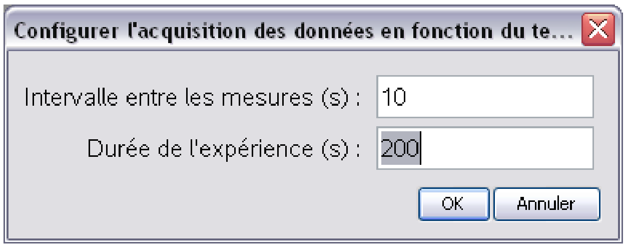
La console d'acquisition[3] de données s'affiche.

Le capteur, reconnu automatiquement, y affiche le poids actuel de la bouteille.
Effectuer éventuellement un réglage du zéro du capteur en appuyant sur la touche menu puis en choisissant l'icône **2 : Capteurs** puis **Zéro**.



Appuyer à nouveau sur la touche menu puis choisir **1 : Expérience**.

Régler le mode d'acquisition: graphe temps toutes les 10 secondes sur 200s.



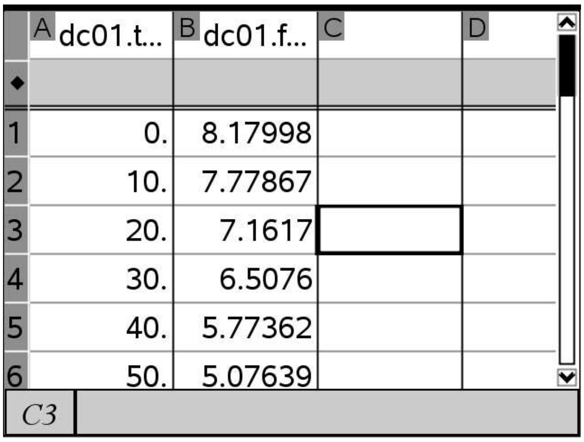
Acquisition des mesures

Déboucher la bouteille, qui se vidange par son trou de diamètre du clou préalablement noté[4], et déclencher l'acquisition en cliquant sur la flèche verte qui devient rouge mais redevient verte après l'acquisition définitive de toutes les mesures.

3. Exploitation des mesures

L'analyse mathématique réalisée à l'aide de TI-Nspire va consister à

utiliser le tableur pour calculer :
- le volume d'eau restant dans la clepsydre,
- la hauteur *z* de la surface libre,
- la vitesse de chute moyenne v_i de la surface libre toutes les 20 secondes dans cette clepsydre, par calcul du nombre dérivé symétrique (sauf au départ et à la fin où on calcule le nombre dérivé simple).



En fin de vidange, le poids de l'eau restante est de 0,28 N.
Le poids total est donné par la relation $P = M \times g$ avec $g = 9{,}8$ N/kg et la masse volumique de l'eau $\rho = \frac{M}{V}$ est approximativement de 1 kg/m^3.

[3] Le raccourci ctrl D permet d'afficher la console d'acquisition de données.
[4] Diamètre du clou 2,8 mm.

Il vient donc pour le calcul du volume : $V = \dfrac{P - 0.28}{9.8}$ (V en litres).

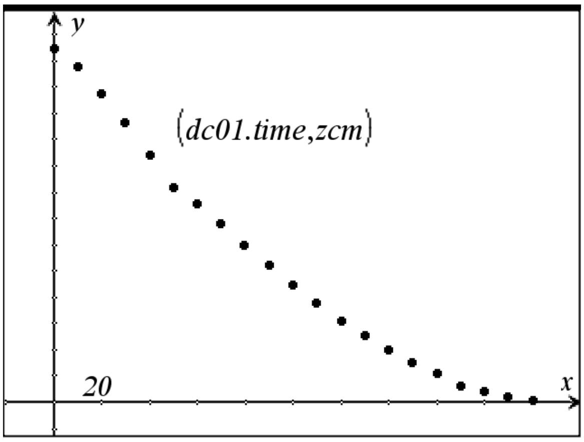
La hauteur d'eau z se calcule donc aisément en supposant que le volume d'eau est assimilable à un cylindre : $z = \dfrac{m}{\rho \times M \times \pi \times R^2}$ (z en cm).

Le rayon de la bouteille est de $\phi = 8,74$ cm .

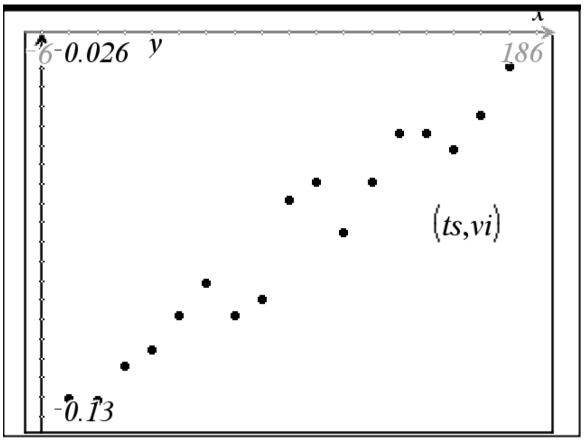
	c01.f...	C vl	D zcm	E vi
◆		=(b[]−0.26	=c[]/(0.059	
1	.17998	0.808161	13.4918	⁻0.0683...
2	.77867	0.767211	12.8082	⁻0.0867...
3	7.1617	0.704255	11.7572	⁻0.1082...
4	6.5076	0.63751	10.6429	⁻0.1182...
5	.77362	0.562614	9.39255	⁻0.1219...

$E1 \; = \dfrac{d2 - d1}{10}$

- Utiliser l'application **Graphiques & géométrie** pour :
  - Tracer les graphes z et v_i en fonction du temps,
  - Conjecturer : comment fabriquer une clepsydre idéale dans laquelle l'eau descendrait verticalement à vitesse constante et créer ainsi une horloge à eau,
  - Chercher un profil idéal de clepsydres à graduations temporelles horizontales et équidistantes, donc dans lesquelles la vitesse de descente de la surface libre serait uniforme.



- Réaliser des calculs statistiques pour rechercher un modèle.



ANALYSE DES GRAPHES

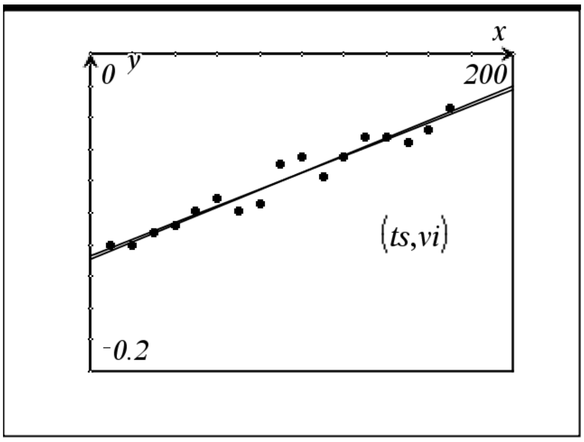
Le graphe des hauteurs d'eau au dessus du trou (z en cm) en fonction du temps : $z = f(t)$ évolue de façon non linéaire.
Le graphe de vitesse de chute de la surface libre *vi* en fonction du temps évolue, lui, de façon linéaire. Le premier graphe suit donc une loi de régression quadratique à déterminer.

Comment ce cylindre pourrait il constituer une horloge à eau graduée toutes les 30 secondes ?

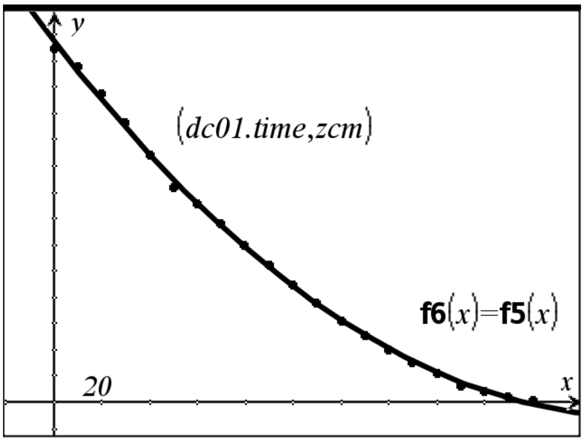
Effectuons ces modélisations pour $z = f(t)$ et $vi = f(t)$.

	=LinRegM
Titre	Régress...
RegEqn	m*x+b
m	4.3E-4
b	-0.109
r^2	0.778

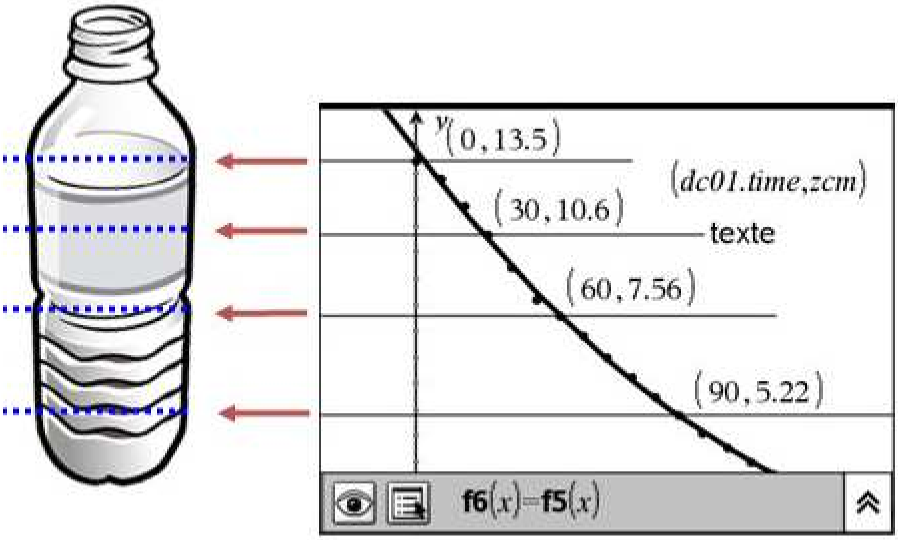
	=QuadReg
Titre	Régress...
RegEqn	a*x^2+b...
a	2.43E-4
b	-0.118
c	13.8
R^2	0.999



$v_i = f(t)$



$z = f(t)$



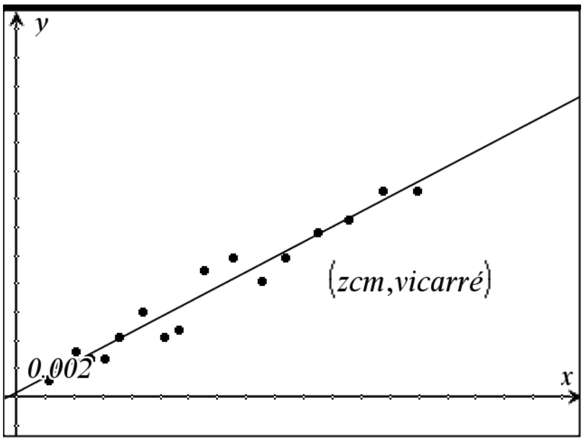
Principe de graduation de l'horloge à eau

4. Recherche d'un profil idéal (complément à proposer sur la fiche élève)

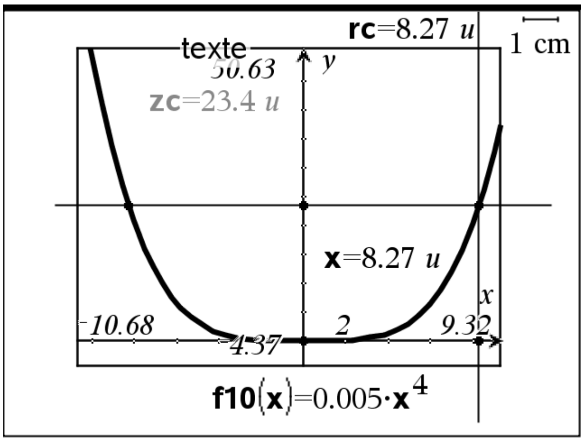
Application aux Clepsydres

L'énergie cinétique: $\Delta m \times \frac{v^2}{2}$ acquise par une tranche d'eau Δm initialement immobile, qui s'écoule sans frottement, à l'air libre, est égale à sa perte d'énergie potentielle: $\Delta m \times \text{g} \times z$. Il vient donc $v = \sqrt{2\text{g}z}$ ou $v_i^2 = 2\text{g}z$.

Calculez puis représentez le carré de la vitesse de descente de la surface libre *vi* en fonction de *z* cm. Justifier la forme linéaire de ce graphe et son équation de régression.

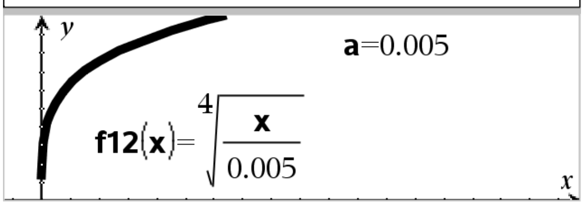


Cherchez un profil idéal de clepsydres à graduations temporelles horizontales et équidistantes, donc dans lesquelles la vitesse de descente de la surface libre serait uniforme.
On doit chercher des formes évasées puisque le débit est fort, puis s'affaiblit au fur et à mesure que la surface libre perd de l'altitude.
On peut rechercher, ce qui se passerait par hasard, avec des clepsydres en forme de cônes tronqués ou non et ouverts vers le haut, ou de paraboloïdes ; calculer dans ces cas la relation choisie entre le rayon et la profondeur du vase puis calculer par une intégrale le volume des récipients liés à leur profondeur et voir si le débit à l'intérieur du récipient peut correspondre à son débit de sortie :



s désigne la section de l'ouverture faite par le clou de rayon *r*,
S désigne la section moyenne de la bouteille de rayon *R*.

Vérification de l'efficacité du clepsydre choisi dont le rayon R varie avec sa profondeur x selon la loi: $R = \sqrt[4]{\frac{x}{a}}$



Le débit étant le même à l'entrée et à la sortie : $d = S \times vi = s \times v$ (Voir Annexe)

$$d = -s \times \sqrt{2\text{g}z}.$$

Réponse définitive :

$$v_i = s \times \frac{\sqrt{2\text{g}z}}{S} = \pi \times r^2 \times \frac{\sqrt{2\text{g}z}}{\pi R^2}$$

Donc, pour que v_i soit constant et indépendante de *z*, il faudrait que R^2 soit proportionnel à $\sqrt{z}$ et donc que $z = a \times R^4$.
Choisir *a* pour que la clepsydre soit assez évasée. Ici *a* = 0,005.

Débit volumique de ce clepsydre et descente régulière de sa surface libre z0−z au cours du temps:
dV/dt $=-s*v$ *avec* $v = \sqrt{2gz} = -s*\sqrt{2gz}$
$= -\pi R*R*dz/dt = -\pi\sqrt{\frac{z}{0.005}}*dz/dt$
$s*\sqrt{2g} = -\pi/\sqrt{0.005}*dz/dt$ *donc dz/dt =constante et z =−cte*t+z0*

Annexe : Connaissances théoriques utiles en sciences physiques

La clepsydre est une horloge à eau connue aussi bien des Egyptiens que des Amérindiens ou que des Grecs. Un vase percé d'un trou laisse couler de l'eau. Des graduations situées à l'intérieur permettent de mesurer des intervalles de temps. Cette clepsydre a une forme évasée, plus large en haut, car le débit de l'eau est plus grand quand la dénivellation est plus grande. Les graduations sont ici à peu près équidistantes. Si le cadran solaire donne l'heure pendant le jour, la clepsydre fait la même chose la nuit, et elle mesure en plus des durées plus brèves avec une bonne précision.

La clepsydre tient une grande importance dans la vie des cités. On connaît le goût des Grecs pour la politique, la polémique, la justice : la clepsydre sert pour limiter la durée des discours ou des plaidoiries.

Parmi les réalisations les plus connues, citons la clepsydre offerte par le calife de Bagdad à Charlemagne, en 807, mettant en action des automates, et la gigantesque clepsydre réalisée en Chine par Su-Sung pour l'Empereur, vers 1090, de plus de 10 mètres de haut.

Connaissances générales nécessaires à la compréhension du thème étudié.

- Le poids *P* est proportionnel à la masse *m* exprimée en kg et $P = m \times g$ (avec g = 9.8 N/kg).
- L'eau est un liquide très fluide pratiquement incompressible, donc sa masse volumique ρ est constante. Le débit *d* volumique de l'eau écoulée, à un instant donné, à travers un conduit, est identique à l'intérieur de tout ce conduit.
- Si la section du conduit augmente, la vitesse d'écoulement devient plus lente. Si sa section diminue, la vitesse de l'eau augmente.
- L'eau, immobile au départ et de masse *m*, est soumise, au niveau de sa surface libre, à la pression atmosphérique, qui s'exerce de haut et en bas, et au niveau du trou, elle est aussi placée à l'air libre, et soumise à la pression de l'air exercée de bas en haut. Ainsi la pression de l'air ne joue aucun rôle notable.
- L'eau s'écoule en conservant son énergie mécanique, car elle glisse sans frottement notable dans son conduit ici très lisse.

Donc pour une tranche d'eau Δm, qui se déplace entre l'état 1 et l'état 2, l'augmentation d'énergie cinétique compense la perte d'énergie potentielle de pesanteur :

$$\frac{\Delta m\left(v_2^2 - v_1^2\right)}{2} = -\Delta m \times g\left(z_2 - z_1\right).$$

De cette relation de conservation de l'énergie mécanique, on peut en déduire l'expression de la vitesse du fluide $v = \sqrt{2gz}$.

Application aux Clepsydres.
Les anciens ont utilisés des récipients évasés et percés, pour mesurer la nuit ou dans des tribunaux, l'écoulement du temps, par l'observation de l'écoulement de l'eau. Leurs graduations non équidistantes restaient, hélas, imprécises en l'absence de loi physique.

L'énergie cinétique : $\Delta m \times \frac{v^2}{2}$ acquise par une tranche d'eau Δm initialement immobile, qui s'écoule sans frottement, à l'air libre, est égale à sa perte d'énergie potentielle : $\Delta m \times g \times z$.
Le calcul, puis la représentation graphique du carré de la vitesse de descente de la surface libre *vi* en fonction de z cm, est de la forme $v_i^2 = 2gz$. On vérifie expérimentalement la linéarité du carré de la vitesse en fonction de z.

Justification théorique de la forme du profil à donner à la clepsydre

Considérons une ligne de courant du fluide qui s'écoule, et sur cette ligne choisissons deux points A et B auxquels nous appliquerons le théorème de Bernoulli.

$$\frac{1}{2}\rho\ U_A^2 + P_A + \rho\ g\ z_A = \frac{1}{2}\rho U_B^2 + P_B + \rho\ g\ z_B$$ (ici, on ne tient pas compte des pertes d'énergie)

ρ : masse volumique du fluide.
P : pression du fluide au point considéré.
Z : ordonnée du point considéré.
U : vitesse du fluide au point considéré.

On sait que le débit volumique peut s'écrire, en désignant par S_A l'aire de la section du réservoir en A et par S_B l'aire de l'orifice, $S_A U_A = S_B U_B$.

Ce qui donne : $U_A = \frac{S_B U_B}{S_A}$.

- Compte tenu des valeurs numériques de S_A et de S_B , on remarque que $\frac{S_B}{S_A} < 1$. Par conséquent

  $U_A < U_B$ et $U_A^2 << U_B^2$, ce qui nous amène à négliger le terme $\frac{1}{2}\rho U_A^2$ devant $\frac{1}{2}\rho U_B^2$.
- A et B sont à la pression atmosphérique par conséquent $P_A = P_B$.

L'équation devient $\rho g z_A = \frac{1}{2}\rho U_B^2 + \rho g z_B$.

Et la vitesse de sortie U_B s'écrit : $U_B = \sqrt{2g(z_A - z_B)}$.
Si on choisit $z_A = 0$ et $z_A = z$ (variable), $U_B = \sqrt{2gz}$

On remarque que la vitesse de sortie du jet varie comme $\sqrt{z}$. Cela explique la grande vitesse observée au début de la vidange (z est grand) ainsi que la faible vitesse à la fin où z devient très faible.

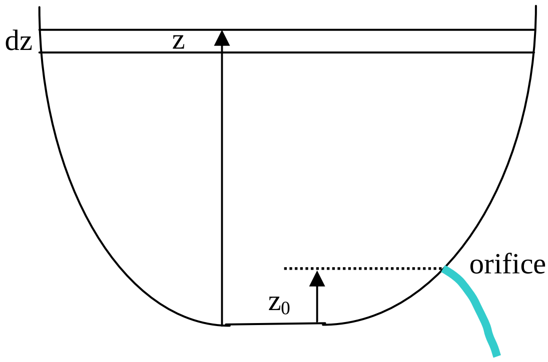
L'abaissement du niveau très rapide au départ se poursuit en ralentissant régulièrement tandis que le jet, qui a la forme d'une parabole de grande portée au départ, voit sa portée diminuer régulièrement au cours du temps. (Ceci dans l'hypothèse où l'ouverture sur le bas de la clepsydre est latérale.)

La loi de variation du niveau z de la surface libre de l'eau en fonction du temps t est de la forme

$$z = \frac{g}{2}\frac{s^2}{S^2}t^2 - \frac{s}{S}(2gz_M)^{\frac{1}{2}} + z_M .$$

g représente l'accélération de la pesanteur
s la surface de l'orifice
S la surface de la section du réservoir (surface libre du liquide)
z_M la cote de la surface libre du liquide à l'instant $t = 0$

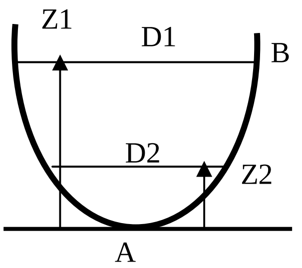
Retrouvons pourquoi le niveau de l'eau s'abaisse à vitesse constante lorsque le profil de la clepsydre est de la forme $z = ar^4 + b$.



Si pendant un petit intervalle de temps dt le niveau de la surface libre S s'abaisse de dz le volume de fluide déplacé dv a pour expression Sdz et c'est le même volume qui s'écoule par l'orifice O de surface s on peut de même écrire :

$$\mathrm{d}v = s\sqrt{2g(z - z_0)}\,\mathrm{d}t .$$

Il suffit ensuite d'écrire que le débit du fluide a même valeur dans une section large qu'à travers l'orifice soit $S\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = s\sqrt{2g(z - z_o)}$.



Si le niveau s'abaisse à vitesse constante c'est que $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = k$ et, finalement, en posant S = πr^2 on trouve l'équation $z = \frac{\pi^2 r^4 k^2}{2gs^2} + z_0$ d'où $a = \frac{\pi^2 k^2}{2gs^2}$.

Si les points A et B appartiennent à une courbe du type $z = ar^4 + b$, on obtient $a = \frac{z_1 - z_2}{r_1^4 - r_2^4}$ à partir des mesures telles que D_1, D2, Z1, Z2 sur le réservoir.

Une autre solution

Voici une solution physique, qui permet d'utiliser des récipients cylindriques.
Bien fermer le goulot de la bouteille déjà pleine d'eau, avec un bouchon troué dans lequel on introduit, un long tube creux, qui fait entrer l'air, jusque là où il débouche dans l'eau,
La pression de l'air s'exercera sur l'eau de la bouteille seulement à l'extrémité de ce tube creux, à une hauteur *z*, choisie au dessus du trou de vidange par l'enfoncement plus ou moins profond de ce tube creux.
L'eau sortira avec la vitesse $v = \sqrt{2gz}$ constante, tant qu'il restera de l'eau au dessus de l'extrémité inférieure du tube creux.