

## E1n – COMPRENDRE LE FONCTIONNEMENT DES CLEPSYDRES

Auteur : J-L Balas sur une idée de J Périès

TI-Nspire™ - TI-Nspire™ CAS

**Avertissement** : ce document a été réalisé avec la version 1.6

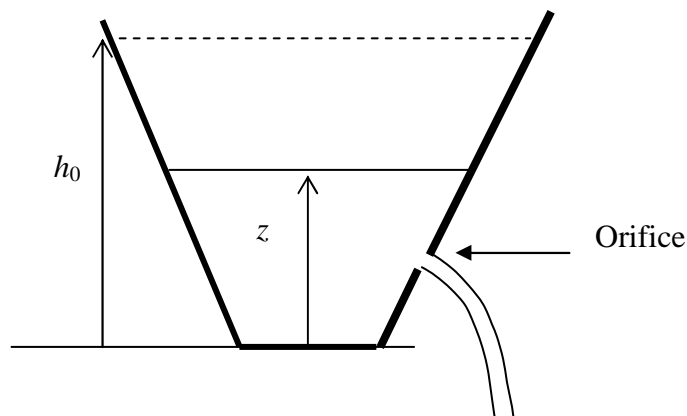


**Mots-clés** : Écoulement fluide, étalonnage, horloge, énergie cinétique, énergie potentielle.

**Fichiers associés** : E1nElev\_Clepsydre.tns, E1nProf\_Clepsydre.tns, E1n\_Clepsydre\_tuyau.tns

### O. Préambule

Le cadran solaire présente un inconvénient : il ne permet pas de mesurer des durées en l'absence de soleil, soit la nuit, soit par temps couvert. Les anciens ont eu l'idée d'utiliser l'écoulement de l'eau pour donner l'heure de jour comme de nuit, été comme hiver. Les instruments de mesure du temps basés sur ce principe sont appelés clepsydes. Les premières clepsydes ou horloges à eau fonctionnaient selon le principe suivant : un récipient conique percé d'un trou à sa base est rempli d'eau : lors de l'écoulement de l'eau le niveau de la surface libre s'abaisse, il est alors possible d'établir une relation entre la position  $h$  de la surface libre de l'eau et la durée  $\Delta t$  de l'écoulement de l'eau. Les anciens ont fait preuve de beaucoup d'imagination et d'une grande ingéniosité pour obtenir des clepsydes qui donnent des mesures du temps relativement précises et reproductibles. Actuellement on sait que les plus anciennes horloges à eau du bassin méditerranéen (Egypte) datent





Vases étalons utilisés pour remplir les clepsydes  
Musée de l'agora : Athènes

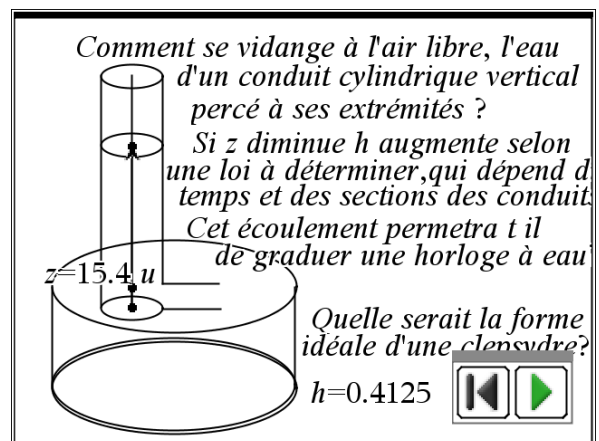


Clepsydre  
Musée de l'agora : Athènes

de 1400 av. JC et que certaines ont été utilisées en Europe jusqu'au début du XIX<sup>e</sup> siècle (Musée du temps à Besançon). Les différentes clepsydes retrouvées à ce jour se présentent sous les formes les plus diverses cela va de la clepsydre la plus simple : récipient conique percé d'un trou à sa base à la clepsydre la plus sophistiquée où l'eau qui s'écoule entraîne un mécanisme complexe.

## 1. Objectifs

- Découvrir les lois du mouvement de l'écoulement de l'eau, libérée à l'air libre à la base d'un réservoir, et source d'énergie hydraulique, grâce à la pesanteur terrestre.
- Expliquer le fonctionnement des clepsydes : horloges à eau antiques constituées d'un réservoir émetteur et d'un réservoir récepteur, qui limitaient autrefois la durée des interventions dans des tribunaux en Grèce.
- Déterminer le profil idéal à donner à la clepsydre pour constituer une horloge à eau fiable.



Animation sur le fichier Clepsydre\_tuyau.tns

## 2. Description du protocole expérimental

On se propose de mesurer, en fonction du temps, le poids d'un réservoir contenant l'eau, qui stagne ou s'écoule. Celui-ci est mesurable, à tout instant, par un capteur de force, qui soutient cet ensemble suspendu en équilibre.

**a) Matériel nécessaire**

Un capteur de force 50 N -10 N : Un adaptateur Vernier Easy-Link<sup>1</sup> ou Go-Link<sup>2</sup>,  
 Un cristalliseur,  
 Un support avec noix de serrage,  
 Un clou de diamètre connu,  
 Du fil et un petit tube de diamètre connu (éventuellement).

**b) Réalisation du montage**

Percer le fond ou la face latérale de la bouteille. Lorsque la bouteille est remplie d'eau, celle-ci ne pourra s'évacuer que lorsque le bouchon sera dévissé. Lorsque cessera l'action de la pression atmosphérique exercée par l'eau sur le trou.



La bouteille est préalablement percée sur le fond ou la face latérale à l'aide d'un clou de diamètre connu préalablement chauffé.

Boucher le trou avec un doigt, pour remplir d'eau la moitié de la bouteille. Revisser le bouchon sur son goulot. La bouteille ne se vide pas, malgré sa base percée, à cause de la pression atmosphérique exercée sur l'eau par le trou.

Suspendre cette bouteille à demi pleine à un capteur de force limité à 10 N, avant d'amorcer sa vidange dans une bassine située plus bas.

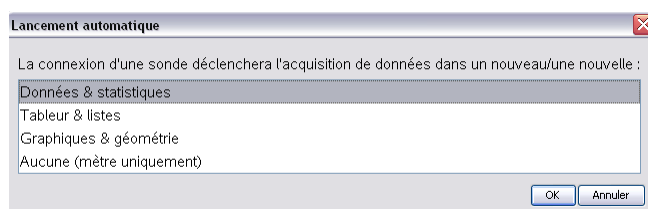
Relier le capteur de force au port USB de la calculatrice ou de l'ordinateur par les câbles adaptés : Easy-link ou GO-link.

**c) Acquisition des données***Configuration de l'acquisition*

Mettre l'unité nomade sous tension.

Le capteur de force est automatiquement reconnu par le système. La fenêtre de « *Lancement automatique* » s'ouvre pour proposer l'application dans laquelle on visualisera les données.

Choisir l'application **Tableur & listes**.





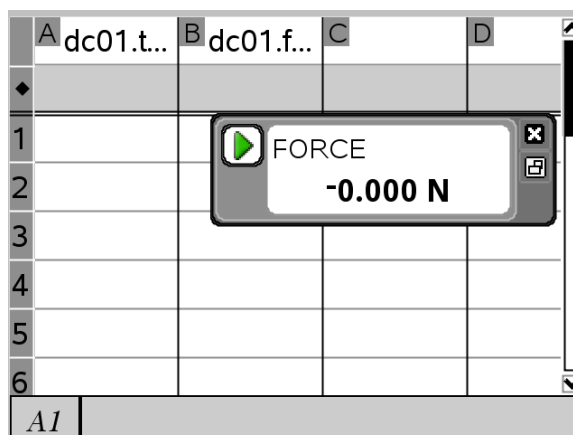
<sup>1</sup> Fonctionne avec l'unité nomade TI-Nspire.



<sup>2</sup> Fonctionne avec un ordinateur.

La console d'acquisition<sup>3</sup> de données s'affiche.

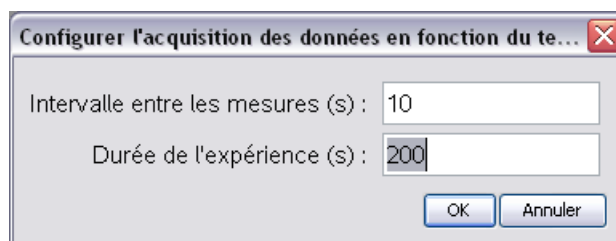
Le capteur, reconnu automatiquement, y affiche le poids actuel de la bouteille.

Effectuer éventuellement un réglage du zéro du capteur en appuyant sur la touche  puis en choisissant l'icône  **2 : Capteurs** puis **Zéro**.




Appuyer à nouveau sur la touche  puis choisir  **1 : Expérience**.

Régler le mode d'acquisition: graphe temps toutes les 10 secondes sur 200s.



### Acquisition des mesures

Déboucher la bouteille, qui se vidange par son trou de diamètre du clou préalablement noté<sup>4</sup>, et déclencher l'acquisition en cliquant sur la flèche

verte  qui devient rouge mais redevient verte après l'acquisition définitive de toutes les mesures.


## 3. Exploitation des mesures

L'analyse mathématique réalisée à l'aide de TI-Nspire va consister à :

Utiliser le tableur pour calculer :

- le volume d'eau restant dans la clepsydre,
- la hauteur  $z$  de la surface libre,
- la vitesse de chute moyenne  $v_i$  de la surface libre toutes les 20 secondes dans cette clepsydre, par calcul du nombre dérivé symétrique (sauf au départ et à la fin où on calcule le nombre dérivé simple).

	A	B	C	D
	dc01.t...	dc01.f...		
1	0.	8.17998		
2	10.	7.77867		
3	20.	7.1617		
4	30.	6.5076		
5	40.	5.77362		
6	50.	5.07639		
C3				

<sup>3</sup> Le raccourci   permet d'afficher la console d'acquisition de données.

<sup>4</sup> Diamètre du clou 2,8 mm.

Noter le poids de l'eau restant en fin de vidange :

$$P_f = \dots\dots\dots$$

Le poids total est donné par la relation  $P = M \times g$  avec  $g = 9,8 \text{ N/kg}$  et la masse volumique de l'eau  $\rho = \frac{M}{V}$  est approximativement de  $1 \text{ kg/m}^3$ .

Montrer que le volume d'eau s'exprime par la relation  $V = \frac{P - P_f}{9.8}$  (V en litres).

En déduire l'expression de la hauteur d'eau  $z$  en supposant que le volume d'eau est assimilable à un cylindre.

$$z = \frac{m}{\rho \times M \times \pi \times R^2} \quad (z \text{ en cm}).$$

Le rayon de la bouteille est de  $\phi = \dots\dots\dots \text{ cm}$ .

Compléter les colonnes du tableur qui contient déjà les mesures de  $t$  en colonne A et de  $P$  en colonne B par :

- le volume  $vl$  en colonne C exprimé en litres,
- la hauteur  $z$  en colonne D exprimé en cm,
- la vitesse  $vi$  en colonne E (calculée par dérivée symétrique, exceptée pour les premières et dernières colonnes).

$$z = \frac{m}{\rho \times M \times \pi \times R^2}$$

$$v = \frac{P - P_f}{9.8}$$

	A t	B p	C vl	D z	E vi
◆					
1					
2					
3					
4					
5					
6					
	E	vi			

$$\text{Première cellule} = \frac{(d'2 - d'1)}{10}$$

$$\text{Seconde cellule} = \frac{d'3 - d'1}{20}$$

Puis recopie jusqu'à l'avant dernière

$$\text{Dernière cellule} = \frac{d'21 - d'20}{10}$$

- Utiliser l'application **Graphiques & géométrie** pour :

- Tracer les graphes  $z$  et  $v_i$  en fonction du temps,
- Conjecturer : comment fabriquer une clepsydre idéale dans laquelle l'eau descendrait verticalement à vitesse constante et créer ainsi une horloge à eau,
- Chercher un profil idéal de clepsydes à graduations temporelles horizontales et équidistantes, donc dans lesquelles la vitesse de descente de la surface libre serait uniforme.

## ANALYSE DES GRAPHES

- Le graphe des hauteurs d'eau au dessus du trou ( $z$  en cm) en fonction du temps :  $z = f(t)$  évolue-t-il de façon linéaire ou non linéaire ? Justifier votre réponse.
- Le graphe de vitesse de chute de la surface libre  $v_i$  en fonction du temps évolue-t-il de façon linéaire ?
- Quel type de fonction peut donc modéliser la fonction  $z$  (voir aide) ?
- Comment ce cylindre pourrait il constituer une horloge à eau graduée toutes les 30 secondes ?

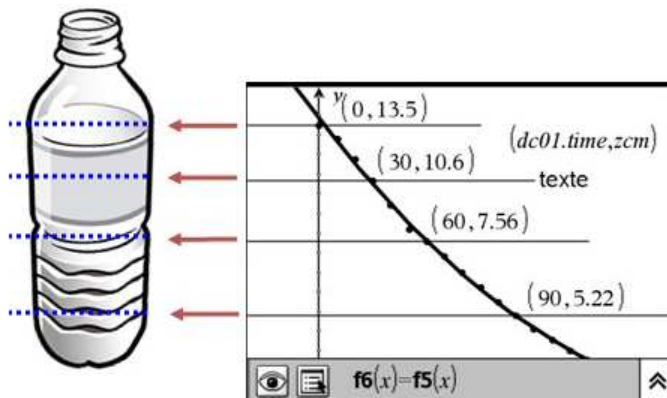
Rédiger votre réponse dans ce cadre

**Aide :** La vitesse  $v_i$  est telle que :  $v_i = \frac{dz}{dt}$  donc  $z$  est une primitive de  $v_i$ .

Effectuer ces modélisations pour  $z = f(t)$  et  $v_i = f(t)$  dans le tableur, consigner ci-dessous vos résultats.

Modélisation $z = f(t)$	Modélisation $v_i = f(t)$

Dans l'application **Graphiques & géométrie**, construire l'étalonnage de votre clepsydre en vous inspirant du modèle ci-dessous.



Principe de graduation de l'horloge à eau

## Annexe : Connaissances théoriques utiles en sciences physiques



La clepsydre est une horloge à eau connue aussi bien des Egyptiens que des Amérindiens ou que des Grecs. Un vase percé d'un trou laisse couler de l'eau. Des graduations situées à l'intérieur permettent de mesurer des intervalles de temps. Cette clepsydre a une forme évasée, plus large en haut, car le débit de l'eau est plus grand quand la dénivellation est plus grande. Les graduations sont ici à peu près équidistantes. Si le cadran solaire donne l'heure pendant le jour, la clepsydre fait la même chose la nuit, et elle mesure en plus des durées plus brèves avec une bonne précision.

La clepsydre tient une grande importance dans la vie des cités. On connaît le goût des Grecs pour la politique, la polémique, la justice : la clepsydre sert pour limiter la durée des discours ou des plaidoiries.

Parmi les réalisations les plus connues, citons la clepsydre offerte par le calife de Bagdad à Charlemagne, en 807, mettant en action des automates, et la gigantesque clepsydre réalisée en Chine par Su-Sung pour l'Empereur, vers 1090, de plus de 10 mètres de haut.

### Connaissances générales nécessaires à la compréhension du thème étudié.

- Le poids  $P$  est proportionnel à la masse  $m$  exprimée en kg et  $P = m \times g$  (avec  $g = 9.8 \text{ N/kg}$ ).
- L'eau est un liquide très fluide pratiquement incompressible, donc sa masse volumique  $\rho$  est constante. Le débit  $d$  volumique de l'eau écoulée, à un instant donné, à travers un conduit, est identique à l'intérieur de tout ce conduit.
- Si la section du conduit augmente, la vitesse d'écoulement devient plus lente. Si sa section diminue, la vitesse de l'eau augmente.
- L'eau, immobile au départ et de masse  $m$ , est soumise, au niveau de sa surface libre, à la pression atmosphérique, qui s'exerce de haut et en bas, et au niveau du trou, elle est aussi placée à l'air libre, et soumise à la pression de l'air exercée de bas en haut. Ainsi la pression de l'air ne joue aucun rôle notable.
- L'eau s'écoule en conservant son énergie mécanique, car elle glisse sans frottement notable dans son conduit ici très lisse.

Donc pour une tranche d'eau  $\Delta m$ , qui se déplace entre l'état 1 et l'état 2, l'augmentation d'énergie cinétique compense la perte d'énergie potentielle de pesanteur :

$$\frac{\Delta m (v_2^2 - v_1^2)}{2} = -\Delta m \times g (z_2 - z_1).$$



De cette relation de conservation de l'énergie mécanique, on peut en déduire l'expression de la vitesse du fluide :  $v = \sqrt{2gz}$ .

### Application aux Clepsydras

Les anciens ont utilisé des récipients évasés et percés, pour mesurer la nuit ou dans des tribunaux, l'écoulement du temps, par l'observation de l'écoulement de l'eau. Leurs graduations non équidistantes restaient, hélas, imprécises en l'absence de loi physique.

L'énergie cinétique :  $\Delta m \times \frac{v^2}{2}$  acquise par une tranche d'eau  $\Delta m$  initialement immobile, qui s'écoule sans frottement, à l'air libre, est égale à sa perte d'énergie potentielle :  $\Delta m \times g \times z$ .

Le calcul, puis la représentation graphique du carré de la vitesse de descente de la surface libre  $v_i$  en fonction de  $z$  cm, est de la forme  $v_i^2 = 2gz$ . On vérifie expérimentalement la linéarité du carré de la vitesse en fonction de  $z$ .

### Une solution permettant d'obtenir une vitesse de descente de la surface libre uniforme

Voici une solution physique, qui permet d'utiliser des récipients cylindriques.

Bien fermer le goulot de la bouteille déjà pleine d'eau, avec un bouchon troué dans lequel on introduit, un long tube creux, qui fait entrer l'air, jusque là où il débouche dans l'eau,

La pression de l'air s'exercera sur l'eau de la bouteille seulement à l'extrémité de ce tube creux, à une hauteur  $z$ , choisie au dessus du trou de vidange par l'enfoncement plus ou moins profond de ce tube creux.

L'eau sortira avec la vitesse  $v = \sqrt{2gz}$  constante, tant qu'il restera de l'eau au dessus de l'extrémité inférieure du tube creux.

