

## D3n – NOMBRE D'OR

Auteurs : France et Michel Villiaume

TI-Nspire™ CAS

**Thème :** Nombre d'or et suite de Fibonacci.**Fichiers associés :** D3n\_NombreOr\_CAS.tns**1. Énoncé**

a) Démontrer qu'il existe un seul nombre réel positif noté  $\phi$  tel que  $\phi^2 = 1 + \phi$  ; donner sa valeur exacte et une valeur décimale approchée au millièème. Ce nombre est nommé « **Nombre d'or** ».

b) Cette question sera résolue en grande partie grâce à un logiciel de géométrie.

Construire un segment  $[AB]$ , puis la perpendiculaire en B à la droite  $(AB)$ .

Le cercle de centre B passant par A coupe en deux points cette perpendiculaire.

On nommera P un de ces deux points.

Le cercle de centre I, milieu du segment  $[AB]$ , passant par le point P, coupe la demi-droite  $[AB)$  en un point M.

Mesurer à l'aide du logiciel, les longueurs AM et AB et calculer le rapport  $\frac{AM}{AB}$ .

En modifiant la position du point B, étudier l'évolution du rapport  $\frac{AM}{AB}$ .

Etablir une conjecture précise.

Démontrer cette conjecture.

c) On désigne par A' le symétrique du point A par rapport à B.

Le cercle de centre A et de rayon  $[AM]$  coupe le cercle de centre B passant par A en deux points dont l'un sera noté N.

Mesurer en degré, à l'aide du logiciel, l'angle  $A' \hat{A} N$ .

Étudier l'évolution de cette mesure quand on fait varier le point B.

Etablir une conjecture et la valider à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

d) On considère la suite  $(u_n)$  de nombres réels positifs définie de la manière suivante :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = 1 \\ u_{n+2} = u_n + u_{n+1} \end{cases} \quad \text{pour tout entier naturel } n > 0.$$

A l'aide d'un tableur, établir la liste des 50 premiers termes de cette suite ; on ne recopiera pas cette liste sur la copie mais on fera figurer la procédure utilisée.

Donner les valeurs exactes de  $u_{25}$ ,  $u_{37}$  et  $u_{44}$ .

Utiliser une nouvelle colonne du tableur pour faire apparaître les sommes successives :

$$S_1 = u_1$$

$$S_2 = u_1 + u_2$$

.....

$$S_{50} = u_1 + u_2 + \dots + u_{50}$$

Etablir une conjecture concernant la valeur de la somme  $S_n$  en fonction de  $n$ .

Démontrer cette conjecture.

Remarque : on pourra écrire

$$u_2 = u_3 - u_1$$

$$u_3 = u_4 - u_2$$

.....

$$u_{n+1} = u_{n+2} - u_n.$$

e) Dans cette question (et la suivante), on désignera par  $f$  le nombre noté  $\phi$  à la première question.

Par définition  $f^2 = 1 + f$ .

Montrer que  $f^3 = 1 + 2f$ .

Ecrire de la même manière  $f^4, f^5$  et  $f^6$  sous la forme  $a + b \cdot f$  où  $a$  et  $b$  représentent deux entiers naturels.

En utilisant les résultats de la question d) donner, dans une nouvelle colonne du tableur, la décomposition de  $f^n$  pour  $n$  variant de 1 à 50 en détaillant la procédure utilisée.

Donner la décomposition de  $f^{13}$  et  $f^{21}$ .

f) Démontrer que  $f = 1 + \frac{1}{f}$ , puis que  $f = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{f}}$ , puis que  $f = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{f}}}$ .

Utiliser un logiciel approprié pour construire une suite de fractions qui converge vers le nombre  $\phi$  de la première question.

Donner les dix premières fractions de cette suite et la valeur décimale sur laquelle la suite semble se stabiliser.

g) Etudier à l'aide du tableur le comportement de la suite  $(w_n)$  définie par :

$$w_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} \text{ pour tout entier naturel } n \text{ non nul.}$$

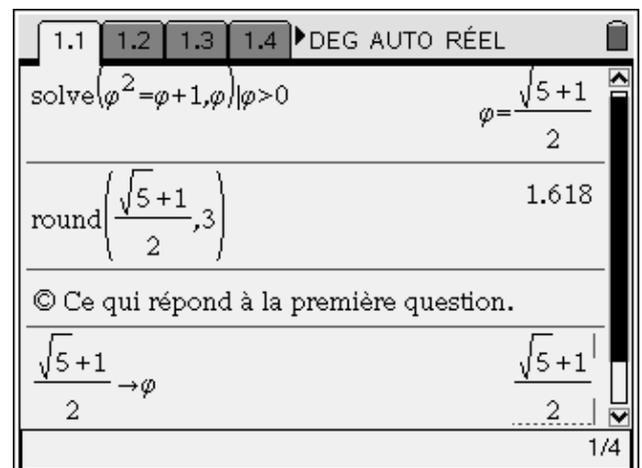
## 2. Commentaires

Les objectifs de ce devoir sont de mettre en évidence plusieurs propriétés du nombre d'or, d'ordre algébrique et géométrique, en utilisant un tableur, un logiciel de calcul formel et un logiciel de dessin géométrique, et d'introduire la suite de Fibonacci en liaison avec le nombre d'or.

## 3. Réponses

Les différentes pages du fichier : D3n\_NombreOr\_CAS.tns permettent de visualiser les principaux écrans demandés et de répondre aux différentes questions posées.

L'écran de la page 1 détaille la démonstration de la question a) à l'aide de l'application **Calculs** avec le calcul formel.



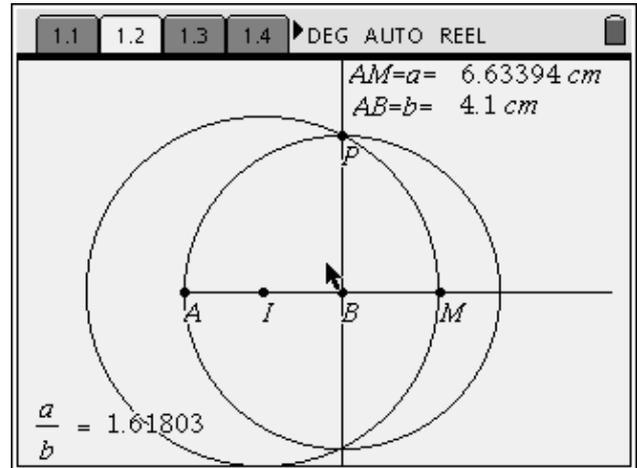
Mise en évidence de plusieurs propriétés du Nombre d'Or d'ordre géométrique :

Construire la figure de la question b) à l'aide de l'application **Graphiques & Géométrie**, écran de la page 2.

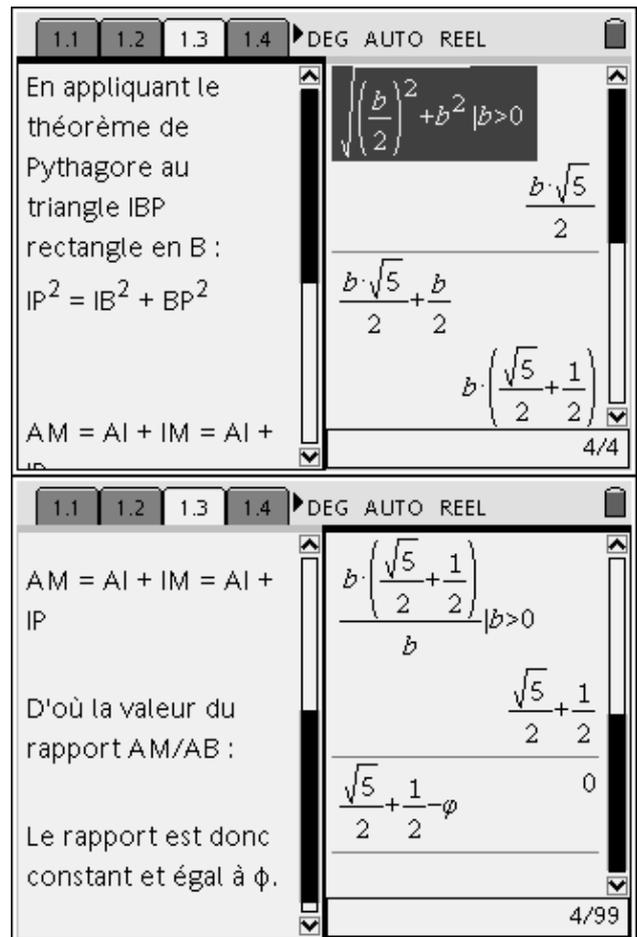
Mesurer les longueurs des segments [AM] et [AB].

Calculer le rapport  $\frac{AM}{AB}$  et étudier son évolution quand B varie.

Conjecturer que le rapport est constant.



Les écrans de la page 3 présentent la démonstration de cette conjecture.



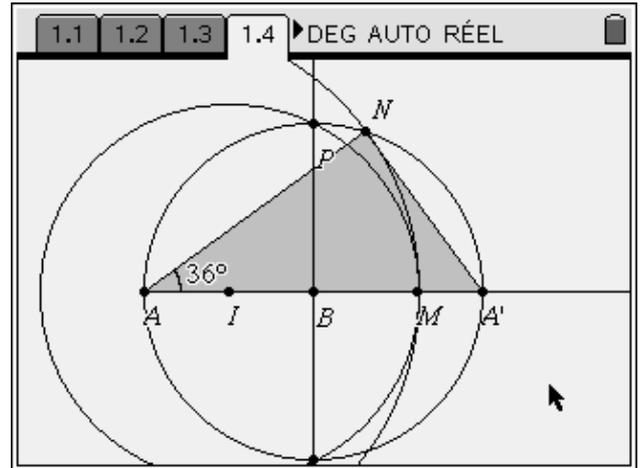
Dans une page **Graphiques & Géométrie** reprendre la figure de la page 2.

Désigner par  $A'$  le symétrique du point A par rapport à B.

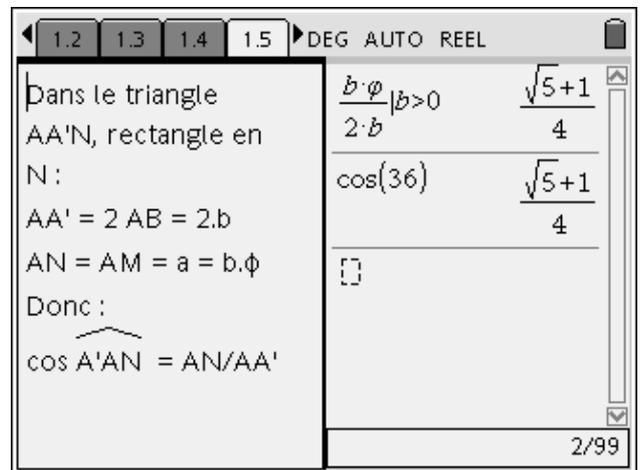
Mesurer l'angle  $A'\hat{A}N$ , en degré, avec l'outil **angle** dans le menu **Mesures**.

Etudier l'évolution de cette mesure en faisant varier le point B.

Conjecturer que la mesure de l'angle est constante quelque soit la position du point B.



Démontrer cette conjecture à l'aide des applications **Editeur de mathématiques** et **Calculs**, écran de la page 5.



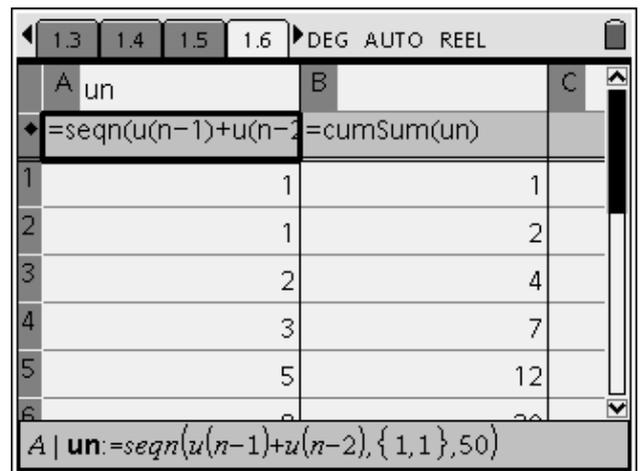
Etudier avec l'application **Tableurs & Listes** la suite  $(u_n)$  définie à la question d) à l'aide des formules figurant dans l'écran de la page 6.

Lire :

$$u_{25} = 75\,025$$

$$u_{37} = 24\,157\,817$$

$$u_{44} = 701\,408\,733$$



Conjecturer et démontrer que :

$$S_n = u_{n+2} - 1$$

en additionnant membre à membre les égalités proposées dans le sujet.

The screenshot shows a TI-84 Plus calculator in the sequence editor. The sequence is defined as  $u_n = \text{seq}(u(n-1) + u(n-2))$ . The table below shows the values of  $u_n$  and their cumulative sum  $\text{cumSum}(u_n)$  for  $n$  from 45 to 50.

n	A $u_n$	B $\text{cumSum}(u_n)$	C
45	1134903170	2971215072	
46	1836311903	4807526975	
47	2971215073	7778742048	
48	4807526976	12586269024	
49	7778742049	20365011073	
50	12586269025	32951280098	

The bottom of the screen shows the value of B50:  $B50 = 32951280098$ .

La recherche des écritures successives demandées se fera dans l'application **Calcul**, écran 7.

Prendre la précaution d'effacer le contenu de la mémoire f avant d'aborder le calcul.

The screenshot shows the TI-84 Plus calculator's Calc screen with the variable  $f$  deleted. The following steps are shown:

- $f^2 = 1 + f$        $f^2 = f + 1$
- $(f^2 = f + 1) \cdot f$        $f^3 = f \cdot (f + 1)$
- $\text{expand}(f^3 = f \cdot (f + 1))$        $f^3 = f^2 + f$
- $f^3 = f^2 + f \cdot f^2 = f + 1$        $f^3 = 2 \cdot f + 1$
- $(f^3 = 2 \cdot f + 1) \cdot f$        $f^4 = f \cdot (2 \cdot f + 1)$

The screen number is 14/14.

The screenshot shows the TI-84 Plus calculator's Calc screen continuing the derivation:

- $\text{expand}(f^4 = f \cdot (2 \cdot f + 1))$        $f^4 = 2 \cdot f^2 + f$
- $f^4 = 2 \cdot f^2 + f \cdot f^2 = f + 1$        $f^4 = 3 \cdot f + 2$
- $(f^4 = 3 \cdot f + 2) \cdot f$        $f^5 = f \cdot (3 \cdot f + 2)$
- $\text{expand}(f^5 = f \cdot (3 \cdot f + 2))$        $f^5 = 3 \cdot f^2 + 2 \cdot f$
- $f^5 = 3 \cdot f^2 + 2 \cdot f \cdot f^2 = f + 1$        $f^5 = 5 \cdot f + 3$
- $(f^5 = 5 \cdot f + 3) \cdot f$        $f^6 = f \cdot (5 \cdot f + 3)$

The screen number is 3/14.

Les décompositions successives de  $f^n$  s'obtiennent dans l'application **Tableur & listes** dans la colonne B.

$$f^{13} = 233*f + 144$$

$$f^{21} = 10\,946*f + 6\,765$$

	A un	B	C
1		1 f	
2		1 f+1	
3		2 2*f+1	
4		3 3*f+2	
5		5 5*f+3	
6			

B2 | =a1+a2\*f

Dans une page **Calculs**, construire la suite de fractions demandée, écran de la page 9.

Pour cela remplacer  $f$  précédemment utilisée par  $g$  et construire la suite de fractions en validant par  de manière répétitive à partir de la troisième ligne.

Remarquer, en remplaçant la valeur exacte par son approximation décimale, que la suite converge vers  $\phi$  (1,618...)

DelVar	g	Terminé
1 → g		1
1 + 1/g → g		2
1 + 1/g → g		3
1 + 1/g → g		2
1 + 1/g → g		5
1 + 1/g → g		3

14/14

Dans l'application **Tableurs et Liste**, étudier le comportement de la suite des valeurs approchées de  $w_n$  et remarquer qu'elle semble converger vers  $\phi$ .

	A un	B wn	C	D
			=approx(wn)	
8	21	34/21	1.61905	
9	34	55/34	1.61765	
10	55	89/55	1.61818	
11	89	144/89	1.61798	
12	144	233/144	1.61806	
13	233	377/233	1.61803	

C12 | =1.61805555555556